Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées emlyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1

PARTIE A

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n e^{1/U_n}$.

1) a) Par récurrence.

d'abord $U_0 > 0$ puisque $U_0 = 1$. donc initialisé.

De plus, soit n quelconque fixé tel que, $n \in \mathbb{N}$ et,

$U_n > 0$

$\Rightarrow U_n \cdot e^{1/U_n} > 0$ puisque, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et comme $U_n > 0$ e^{1/U_n} existe

$\Rightarrow U_{n+1} > 0$.

Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n e^{1/U_n}}{U_n}$ $(U_n > 0)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$= e^{1/v_n}$.

Or, $v_n > 0$ donc, $1/v_n > 0$.

de fait, comme la fonction exponentielle est bijective croissante sur $\mathbb{R}$, alors, $e^{1/v_n} > 1$.

Donc, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$, on a, $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$.

Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

c) Supposons $\lim_{n \to +\infty} v_n = l$ où $l \in \mathbb{R}^{+*}$ et l fixé. (Absurde)

Par le théorème du point fixe on a donc,

$l = l \cdot e^{1/l}$ puisque $l > 0$

$\Leftrightarrow l = l e^{1/l}$

$\Leftrightarrow 1 = e^{1/l}$ Or, $1 = e^{1/l} \Leftrightarrow \frac{1}{l} = 0$.

Comme c'est absurde puisque nécessairement $l \geq 1$ car $v_0 = 1$, alors, c'est absurde.

Donc nécessairement $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2)

```
import numpy as np
u= 1
n=0
while u < 10 **6 :
        u= u* np. exp (1/u)
        n= n+1
print (n)
```

PARTIE B :

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x \cdot e^{1/x}$

3) D'abord, en $+\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{1/x}$.

~~Avec le changement de~~

~~On, $\forall x \in]0, +\infty[$, $x = e^{\ln(x)}$.~~

~~donc, on a, $f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.~~

~~donc par croissance comparée, comme $\lim_{x \to} \frac{\ln(x)}{x}$~~

. limite en $+\infty$:

$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par continuité de l'exponentielle $\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (produit) de plus, $f(x) = x \cdot e^{1/x} = x \cdot \left(e^{x}\right)^{-1} = e^{\ln(x) + \frac{1}{x}}$

$= e^{\frac{x\ln(x)+1}{x}}$

donc par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ donc, $\underline{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

4) f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme produit de composées de fonctions usuelles l'étant ($x > 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas).

$\forall x \in \left]0, +\infty\right[$

$$f'(x) = e^{1/x} + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{1/x}$$

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x}$$

$$\underline{f'(x) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

Donc, $f'(x) \geq 0 \iff e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \geq 0 \iff 1 \geq \frac{1}{x}$ $\left(e^{1/x} > 0\right)$

donc f croissante $(x>0) \iff x \geq 1$

$$f'(x) = 0 \iff 1 = \frac{1}{x} \iff x = 1$$

$f'(x) \leq 0 \iff 1 - \frac{1}{x} < 0 \iff 1 < \frac{1}{x}$

donc f décroissante $\iff x < 1$ $(x > 0)$

Dès lors, comme $f(1) = e$,

x	0		1		$+\infty$
signe f'		$-$		$+$	
variations	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées emlyon bs

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5) Soit $x > 0$

a) Par le cours, ~~$\sum_{k \geqslant 0}$~~

$\forall x > 0$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(x^{-1})^k}{k!}$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$ existe et vaut e^x si x réel.

Or, x^{-1} existe car $x \neq 0$, donc,

$\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ existe et vaut $\underline{e^{\frac{1}{x}}}$

b) On a, $\forall x > 0$,

$f(x) = x \cdot e^{1/x}$.

De plus, $\forall x > 0$

$\displaystyle x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

6) ~~Soit $x \geq 1$,~~

~~a)~~

$$= x + 1 + \frac{1}{x}\left(x^2\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}\right)\right)$$

$$= x+1 + \frac{1.x^2}{x}\left(e^{\frac{1}{x}} - x^{-1} - 1\right)$$

$$= x+1 + x\left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} - 1\right)$$

$$= x+1 + xe^{\frac{1}{x}} - 1 - x$$

$$\underline{= f(x)}$$

Donc, avec $x \geq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$

6) Soit $x \geq 1$

a)

$\forall x \geq 1$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$

On a, $\forall x \geq 1$,

et $k \geq 2$ $\quad x^{2-k} \leq 1^{2-k}$ puisque la fonction inverse est bijective decroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc,

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Car $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ est uniquement avec des termes positifs.

Donc,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

On admet la suite de la 6a.

b) $x \geq 1$. Donc, $\frac{1}{x} > 0$. Par la 6a, $\forall x \geq 1$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x} \quad (x>0).$$

On en reprenant l'expression de f trouvée en 5b,

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

7) On a par encadrements, $\forall x \geq 1$,

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} + x + 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{x} + x + 1.$$

On, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$. D'où, par encadrements,

$$f(x) = x + 1 + o(1) \text{ en } +\infty$$

8) ADMIS.

PARTIE C :

9) a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k > 0$,

$$\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)$$
$$= \ln(v_k \cdot e^{1/v_k}) - \ln(v_k)$$
$$= \ln(v_k) + \ln(e^{1/v_k}) - \ln(v_k) \quad \text{car } v_k > 0 \text{ et } e^{1/v_k} > 0$$
$$= \ln(e^{1/v_k}) = \frac{1}{v_k}.$$

b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k} \qquad (v_k > 0).$$

$$\Rightarrow \ln(v_n) - \ln(v_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}. \qquad (\text{telescopage})$$

Or $v_0 = 1$,

$$\Rightarrow \ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}. \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

10) (*) valable si $x \geq 1$ et on a $v_0 = 1$ donc par croissance de (v_n), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k \geq 1$ et $v_0 = 1$.

donc on applique * à v_k $(k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2v_k} \leq f(v_k) - v_k - 1 \leq \frac{e}{v_k}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2v_k} + 1 \leq f(v_k) - v_k \leq \frac{e}{v_k} + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc on a bien, $\forall k \in \mathbb{N}$ comme $f(v_k) = v_{k+1}$

$$1 + \frac{1}{2v_k} \leq v_{k+1} - v_k \leq 1 + \frac{e}{v_k} \quad (v_k > 0)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on somme (légal car $n > 0$), $v_k > 0$ (q1)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2v_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - v_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{v_k}$$

Par linéarité de la somme et comme il y a $n-1-0+1$ termes donc n, alors,

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k} \leq v_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{v_k}.$$

(telescopage)

Ensuite par la 9b, comme $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} \ln(v_n) \leq v_n - 1 \leq n + e\ln(v_n)$$

on enlève $n-1$,

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \ln(v_n) \leq v_n - n \leq 1 + e\ln(v_n) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11) a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n > 0.$

Soit h, $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Par croissance comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

Or, h continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme quotient de fonctions usuelles l'étant dont le denominateur ne s'annule pas.

Donc par continuité, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{v_n} = 0.$$

b)

12) Par 10b, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{v_k} \leq v_n - 1 \leq n + e\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{v_k}$$

EXERCICE 2 :

PA

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1) Effectuons un test de liberté. Soit (λ, μ, γ),

$\lambda I + \mu J + \gamma K = 0_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \gamma = 0 \\ \mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(analyse des coefficients des deux premières lignes)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \gamma=0. \end{cases}$ or, I, J, K appartiennent à $\mathcal{E}$

Par définition, (I, J, K) est une famille libre de $\mathcal{E}$. De plus, cette famille est generatrice de $\mathcal{E}$ (Vect).

C'est donc une base de $\mathcal{E}$.

Donc $\dim \mathcal{E} = 3$.

2) J et K sont symétriques donc diagonalisables.

3)

a) $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} J$

$J^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = 2J$

b) De ce fait, $P(X) = X^3 - 2X$ est annulateur de J.

Or, l'ensemble des valeurs propres de J est racine de ses polynomes annulateurs.

Donc, comme $P(X)=0$

$\Leftrightarrow X(X^2-2)=0$

$\Leftrightarrow X=0$ ou $X=\sqrt{2}$ ou $X=-\sqrt{2}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emLyon bs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc, $Sp(J) \subset \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

4) a) D'abord,

$U_1 \neq 0$ et $JU_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\, U_1$. donc U_1 vecteur propre de J (associé à $\sqrt{2}$)

$U_2 \neq 0$ et, $JU_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. donc U_2 vecteur propre de J (associé à 0)

b) Posons $V_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où (a, b, c) réels et V_3 non-nul.

$JU_3 = -\sqrt{2}\, V_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{b+c = -\sqrt{2}a} \\ \cancel{a = -\sqrt{2}b} \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\sqrt{2}b + \sqrt{2}c = -2a} \\ \cancel{a = -\sqrt{2}b} \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$

U_3 vecteur propre de J associé à $-\sqrt{2}$,

$$\Leftrightarrow \left(J+\sqrt{2}I\right)U_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ a + \sqrt{2}b = 0 \\ a + \sqrt{2}c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a + b + c = 0 \\ a = -\sqrt{2}b \\ a = -\sqrt{2}c \end{cases}$$

en prenant $c = 1$ et $b = 1$ on a alors,

$$U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ est un vecteur propre associé à $-\sqrt{2}$

5) a) La concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de J forme une famille libre.

De ce fait, (U_1, U_2, U_3) est libre. Or, U_1, U_2 et U_3 sont des éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ et cette famille est de cardinal 3.

Or, $\dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$. Donc (U_1, U_2, U_3) base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$

b)

J diagonalisable donc par définition, il existe D diagonale et P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ inversible tels que,

$$J = P D P^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En prenant, $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a bien une telle matrice,

avec, $P^{-1} J P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ P inversible

6)a)

Calculons pour cela. On a, on le rappelle,

$U_1 \neq 0$

$U_2 \neq 0$ et $U_3 \neq 0$

$$K U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{= 1 . U_1 .}$$

$$K U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{= -1 U_2}$$

$$K U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \underline{= 1 . U_3 .}$$

Or, (U_3, U_2, U_1) forme une famille libre.

Comme on a déjà 3 sous-espaces propres et que

$rg(K) = 3$ ~~puisque K diagonalisable~~ alors, nécessairement, car K diagonalisable
car $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ libre
(U_1, U_2, U_3) base de vecteurs propres de K.

6b) Par la 6a), on a $Sp(K) = \{-1, 1\}$.

Dès lors, comme K diagonalisable, et K a les mêmes sous-espaces propres de J donc on garde P,

On a, $P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (On a repris l'ordre des sous-espaces propres).

7) Soit M. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$P^{-1}MP = P^{-1}(aI + bJ + cK)P$

$= aI + b(P^{-1}JP) + c(P^{-1}KP)$

$= \begin{pmatrix} a+\sqrt{2}b+c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a-b\sqrt{2}+c \end{pmatrix}$

b) Comme P inversible en notant $D = P^{-1}MP$,

$P^{-1}MP = D$

$\iff M = PDP^{-1}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées enlyonbs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc comme M semblable à D,

$$Sp(M) = \{a + \sqrt{2}\,b + c,\ a - c,\ a - b\sqrt{2} + c\}$$

8) Soit s tq $s(M) = s(aI + bJ + cK)$

8 a) On a,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$ puisque,

$s(I) = (1, 1, 1)$

$s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$

$s(K) = (1, -1, 1)$

8) b) Montrons que S inversible.

Faisons un test de liberté. Si a, b, c réels

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta\sqrt{2} + c = 0 \\ \alpha - c = 0 \\ \alpha - \beta\sqrt{2} + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -\sqrt{2}\beta \\ \alpha = c \\ 2\alpha = \sqrt{2}\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

Donc la famille est libre, et $rg(S) = 3$.

Donc S inversible

Donc s application linéaire bijective

PARTIE B :

9) def voisins (A, i):
    n = len (A[i])
    V = [ ]

```
for j in range (n):
    if j! = i and A[i, j]! = = 1 :
        V. append ( j )
return V
```

10)

```
from numpy import
def min_ext (L) :
    m=0
    while m in L :
        m= m+1
return (m)
```

11)

```
from numpy import
def coloration (A) :
    n= len (A)
    C= list range (n)
    for i in range (1, n) :
        C =Voisins =
        C[i] = min_ext (C_voisins)
return (c)
```

donc,

```
def coloration (A) :
    n= len (A[0])
    C= list range (n)
    for i in range (1,n) :
        C_voisins = [c(sj) for j in C_voisins]
        C[i]= min_ext (C_voisins)
    return (c)
```

12)

a)

En executant cette commande, on a,

= [0, 1, 0,

b) Oui, on peut proposer, $c(s_0)=3$ $c(s_3)=2$

$c(s_1)=2$ $c(s_4)=1$

$c(s_2)=1$ $c(s_5)=3$

→ suite P21

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296
Nombre de pages : 33
Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 3 :

Partie A :

Soit $U \hookrightarrow U[0,1]$ et $V = \frac{1}{\sqrt{U}}$.

1)a)

$U \in]0,1]$

donc $\sqrt{U} \in]0,1]$.

donc, $\frac{1}{\sqrt{U}} \in [1,+\infty[$.

1b) Si $x < 1$, alors $F_V(x) = 0$ (gauche du support).

Si $x \geq 1$,

$F_V(x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right)$

$= P\left(\sqrt{U} \geq \frac{1}{x}\right)$ car $x > 0$ et fonction inverse bijective décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$= P\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right)$ car la fonction carrée est bijective croissante sur $\mathbb{R}^+$

$= 1 - \frac{1}{x^2}$ $(x \geq 1)$

Donc,

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1. \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

c) D'une part, $\lim_{x \to 0^-} F_V(x) = 0$ et $F_V(1) = 0$

donc F_V continue en 1.

De plus, F_V continue sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions l'étant et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

Donc F_V $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, F_V $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions l'étant * dont le dénominateur ne s'annule pas ($x^2 > 0$ car $x > 1$). * et quotient

Donc F_V $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

Donc V à densité.

De plus, F_V dérivable sur $]-\infty, 1[$ et,

$F_V'(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 1[$ et,

$\forall x \geq 1,$

$$F_V'(x) = - \frac{-1 \cdot 2x}{x^4}$$

$$F_V'(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Donc,

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

← valeur arbitraire puisque V à densité

2)

$E(V)$ existe $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x)\, dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ Converge

$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ Converge.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$.

donc elle Converge et l'espérance existe.

De plus, pour le calcul, on pose $A > 1$,

$$\int_1^A \frac{2}{x^2}\, dx = 2 \cdot \int_1^A \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{(existe car continue)}$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^A$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A$$

$= -\frac{2}{A} + 2$

Avec A qui tend vers $+\infty$, on a,

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = 2$$

donc $E(V) = 2$.

De plus, $V(V)$ existe $\Leftrightarrow E(V^2)$ existe,

$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_V(x)\,dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{2}{x}\,dx$ converge

$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ converge. On, on reconnait ici une intégrale de Riemann divergente de paramètre 1.

Donc, $E(V^2)$ n'existe pas et donc $V(V)$ n'existe pas.

Partie B :

Soit $n \geq 1$.

$M_n = \max(V_1, \ldots V_n)$

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 33

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyonbs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~Si $x<1$~~,

$P(M_n \leq x) = P([V_1 \leq x] \cap [V_2 \leq x] \cap \dots \cap [V_n \leq x])$

car le fait du maximum plus petit que x signifie que tous le sont.

Or, les $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont de mêmes lois et indépendantes.

Donc, $F_n(x) = \prod_{i=1}^{n} P(V_i \leq x)$ (V_i de même lois que V)

$= (F_V)^n$ (car n termes)

b) Si $x \leq 1$

$\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = 0.$

de plus, si $x > 1$,

$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}$.

Or, $x \in]1, +\infty[$ donc $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \in]0, 1[$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De ce fait, $\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$ par composée (continuité de l'exponentielle)

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$.

c) De ce fait, comme $\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$ alors, il est impossible que F_n converge vers une fonction étant fonction de répartition d'une autre variable qui tendrait par définition vers 1.

Donc $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire

Soit W, $F_W(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Soit $n \geq 1$, G_n fonction de repartition de $\frac{M_n}{\sqrt{n}}$.

14) a) Etudions G_n.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right)$$

$$G_n(x) = P\left(M_n \leq \sqrt{n}\, x\right) \quad \text{car } \sqrt{n} > 0$$

Ainsi, si $\sqrt{n}\, x < 1 \iff x < \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(\sqrt{n} > 0)$

alors, $G_n(x) = 0$

si $x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n x^2}\right)^n \quad (\text{q } 1b \text{ et } 3a)$$

~~$G_n(x) =$~~

$$\text{Donc, } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \left(1 - \frac{1}{n x^2}\right)^n & \text{si } x > \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

valeur arbitraire car densité

Ainsi, on a, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Donc, $\forall x > 0$, comme $\left(1 - \frac{1}{n x^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n x^2}\right)}$, alors on étudie la limite et $x > 0$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nx^2} = 0$ alors,

$\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} - \frac{1}{nx^2}$. $(x > 0)$ et n

~~$n \to +\infty$~~

Donc,

$$e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{x^2}}$$ (par produit). $(x > 0)$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$

b) De plus, si $x \leq 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 0$ d'après l'expression de G_n.

Donc,

si $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

si $x \leq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$.

Donc par définition, $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} W$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques appliquées [illegible]

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C :

5) a) Select montants from 2024

b) Selec montants

Partie D : On reprend les valeurs de V.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) $\forall n \in N(\Omega)$

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

8) On remarque que T est égale à l'ensemble des éléments de $\{V_1, \dots V_N\}$ prenant une valeur supérieure à A.

Or N suit une loi de Poisson de paramètre λ et a donc $\mathbb{N}$ pour support.

De fait, $T_n(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque il peut y avoir une infinité ou aucune variable (V_i) supérieure(s) à A.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On peut assimiler T sachant $(N=n)$ à une variable qui compte le nombre de succès de ~~probabilité~~ type $V_i > A$. ($i \in [\![1,n]\!]$) c'est-à-dire "V supérieur à A". En effet, les $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ étant indépendantes et de même loi, on peut assimiler T à un compteur de succès lors de n épreuves similaires et indépendantes.

Or $P(V > A) = 1 - P(V \leq A)$ or comme $A > 1$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)$$

$$= \frac{1}{A^2}$$

$\frac{1}{A^2}$ est donc la probabilité de succès.

Donc, T sachant $(N=n)$ suit $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$. $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b) <u>Si $k > n$</u>, alors $P_{(N=n)}(T=k) = 0$ puisqu'il ne peut pas y avoir plus de variables $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ supérieures à A que de variables présentes dans l'ensemble $\{V_1, \dots V_n\}$

<u>Si $k \leq n$</u>, alors, comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$

$$P_{(N=n)}(T=k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

10) Soit $k \in \mathbb{N}$. $A > 1$

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N=n])_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$P(T=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n) \cdot P_{(N=n)}(T=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

Car $k > n \Rightarrow P_{(N=n)}(T=k) = 0$.

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^n \cdot \frac{1}{(n-k)!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^n \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^n \cdot \frac{1}{(n-k)!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^n \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \cdot \left(\frac{A^2}{A^2-1}\right)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \lambda^{n+k} \cdot \left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n+k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2-1}\right)^k \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \left(\frac{A^2-1}{A^2}\right)^{n+k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1 \cdot \lambda}{A^2}\right)^k e^{\lambda\left(1-\frac{1}{A^2}\right)}$$

(On reconnaît une série ~~géo~~ exponentielle)

$$= \frac{e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda - \frac{\lambda}{A^2}} \cdot \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k$$

$$= \frac{e^{-\frac{\lambda}{A^2}}}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 33	Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques Appliquées emlyonbs

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Ainsi, comme $T(\Omega) = \mathbb{N}$, alors,

$$T \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right).$$

11) De ce fait, comme la moyenne se rapproche de l'espérance et que $T \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)$, alors, on a en moyenne $\frac{\lambda}{A^2}$ sinistres de coût supérieur à A en un an.

$\boxed{\text{FIN}}$