Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 28 | Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice I :

1) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln(x) \geq 0$

$\iff 1 \geq \ln(x)$

$\iff e \geq x$ par croissance de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$ est initialisé à $k=3$ or $3 > e$ donc la décroissance de g sur $[e;+\infty[$ donne la décroissance de $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$.

$$\frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(4) - 2\ln(2)}{4}$$

$$= \frac{\ln(2) + \ln(2) - 2\ln(2)}{4} \text{ car } \ln(4) = \ln(2 \times 2)$$

$$= 0$$

Par décroissance de $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$, on a,

$$\forall k \geq 4, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}.$$

~~V)~~ 2) a) $x \mapsto x-n$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]n;+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition, produit et somme, f_n est dérivable sur $]n;+\infty[$.

$\forall x > n, \; f_n'(x) = \ln(x) + \frac{x-n}{x} - \ln(x-n) - \frac{x}{x-n}$

b) $h : t \mapsto \ln(t) - t + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et,

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \; h'(t) = \frac{1}{t} - 1.$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \; h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 1.$

h atteint donc un maximum en 1 or $h(1) = 0$ donc,

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \; h(t) \leq 0$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \; \ln(t) \leq t - 1.$

$\forall x \in]n ; +\infty[, \; f_n'(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{x}{x-n} - \frac{n}{x}$ avec

$\frac{x-n}{x} = 1 - \frac{n}{x}.$

Or $\frac{x}{x-n} > 0$ donc par 2)b) $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{x}{x-n} \leq 0$

donc $f_n'(x) \leq 0$ car $-\frac{n}{x} \leq 0.$

donc f_n est décroissante sur $]n ; +\infty[$

c) $f_n(n+1) = \ln(n+1) - n+1 \times 0 > 0$

$f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) \leq 0$ car $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2}$

car $n+2 \geq 4$ par 1)b).

Donc $f_n(n+2) < 0 < f_n(n+1)$.

f_n est continue car dérivable sur $[n+1; n+2]$, et est strictement décroissante, donc par théorème de la bijection f_n réalise une bijection de $[n+1; n+2]$ sur $[2\ln(n+2)-(n+2)\ln(2); \ln(n+1)]$.

$\Rightarrow \exists ! \, x_n \in [n+1; n+2], f_n(x_n) = 0$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*/\{1\}, \quad n+1 \leq x_n \leq n+2$

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

Par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$

Donc $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$.

4) a). $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2, f_n(x_n) = 0 \Rightarrow \ln(x_n - n) x_n = (x_n - n)\ln(x_n)$

$$\Rightarrow \ln(x_n - n) = x_n - n \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

car $x_n \geq n+1 > 0$.

b) $x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

Donc par croissance comparée $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5)

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - n) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n - 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$= 0.$

Donc $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$

$\ln(1+n+u_n) = \ln(x_n)$
$= \ln\left(x_n \times \frac{n}{n}\right)$
$= \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) + \ln(n).$

$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0.$ Donc $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)).$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$ soit $\ln(1+u_n+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

b) ~~par 4)a)~~, On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n) = 1$ donc

$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ implique $\frac{(x_n-n)\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$

Donc $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ par l'égalité de 4)a)

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ car

$\ln(u_n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

6) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ (car $x_n \geq n+1$).

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente par Chasles donc par critère de comparaison $\sum\limits_{n\geq 3} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge. Par critère d'équivalence avec des termes positifs, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$,

$\sum_{n\geq 3} u_n$ est une série divergente.

$\frac{\ln^2(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^2$ car 2 ne dépend pas de n.

$\frac{n^{\frac{3}{2}}\ln^2(n)}{n^2} = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}}$

$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Donc $\frac{\ln^2(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^{3/2}} \geq 0.$

Par critère de negligeabilité, $\sum_{n\geq 2} v_n^2$ est une série convergente

car $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente avec $\frac{3}{2} > 1$.

Exercice 2 :

1) a) $\forall y \in F$, $p(y) = y$ car $y \in \mathrm{Im}(p) = F$.

Donc $\|p(y)\| = \|y\|$ soit $y \in \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

Donc $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

1) b) Pour tout $x \in E$, $x-p(x)$ et $p(x)$ sont orthogonaux avec $x-p(x) \in F^\perp$.

Par théorème de Pythagore, $\|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

$= \|x-p(x)+p(x)\|^2$

$= \|x\|^2$, d'où le résultat.

c) Soit $x \in \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2$ et $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|-p(x)+x\|^2$ donc

$\|p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x-p(x)\|^2$ donc $\|x-p(x)\|^2 = 0$

soit $x-p(x) = 0_E$ ~~car~~

~~$x-p(x)$~~ par propriété de la norme

donc $x = p(x)$ soit $x \in F$.

$\{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\} \subset F$ donc on a l'égalité.

• $\forall x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x-p(x)\|^2$

$\leq \|x\|^2$ par positivité de la norme.

Donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve :	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

2)

a) $\forall x \in F_1 \cap F_2$, $\begin{cases} p_2(x) = x \\ p_1(x) = x \end{cases}$

$p_3(x) = p_1(p_2(x))$

$= p_1(x)$

$= x.$

$\Rightarrow x \in F_3$. $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

b) $\forall y \in E$, $\|p_1(y)\| \leq \|y\|$.

en particulier pour $y = p_2(x)$, $x \in F_3$, on a $\|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|$

donc $\|p_3(x)\| \leq \|p_2(x)\|$

donc $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$

or, en appliquant 1) c) à p_2, $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$.

Donc $\|x\| = \|p_2(x)\|$ soit $x \in F_2$ par 1) c)

Or $x \in F_3 \cap F_2$ donc $p_3(x) = x \Rightarrow p_1(p_2(x)) = x$

$\Rightarrow p_1(x) = x$ car $x \in F_2$

$\Rightarrow x \in F_1$

Donc $x \in F_1 \cap F_2$.

c) On en déduit $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ donc par 2) a) que

$F_1 \cap F_2 = F_3$

d) p_3 est un projecteur orthogonal donc est symétrique.

Ainsi, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_3(y), x \rangle = \langle p_3(x), y \rangle$.

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_3(x), y \rangle = \langle p_3(y), x \rangle$

$= \langle p_1 \circ p_2(y), x \rangle$

$= \langle p_2(y), p_1(x) \rangle$ car p_1 est un projecteur orthogonal

$= \langle y, p_2 \circ p_1(x) \rangle$

e) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle = \langle p_2 \circ p_1(x), y\rangle \Rightarrow \langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x), y\rangle = 0$

$\Rightarrow p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) \in \underbrace{E^{\perp}}_{\{0_E\}}$

$\Rightarrow p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x)$.

En particulier $p_1 \circ p_2$ et $p_2 \circ p_1$ coïncident sur la base canonique de E donc $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3)

a) $p^2 = (p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_2)$

$= p_1 \circ \underbrace{(p_2 \circ p_1)}_{= p_1 \circ p_2} \circ (p_2)$

$= p_1^2 \circ p_2^2$

$= p_1 \circ p_2$.

Or par composition p est un endomorphisme de E.
donc p est un projecteur.

b) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle p(x), y\rangle = \langle p_1 \circ p_2(x), y\rangle$

$= \langle p_2(x), p_1(y)\rangle$

$= \langle x, p_2 \circ p_1(y)\rangle$

$= \langle x, p_1 \circ p_2(y)\rangle$ par 2)e)

Donc $p \in \mathcal{S}(E)$

c) p est un projecteur qui plus est symétrique donc p est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$.

Par 2) c) on a que $\underline{\mathrm{Im}(p) = F_1 \cap F_2}$.

4) Si p_1 et p_2 sont des projecteurs, alors $p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

Par unicité du supplémentaire orthogonal car E est euclidien on peut affirmer l'unicité de p_3.

Exercice 3 :

Partie I :

1) par produit et composition, g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_-, -2xe^{-x} \geq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \geq 0$.

$\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 0.

$\forall A \in \mathbb{R}_-^*, \int_A^0 g(x)dx = \left[e^{-x^2} \right]_A^0$

$= 1$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ Converge et vaut 1. g peut être considérée comme une densité de probabilité car positive et continue sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$ car $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$

$= \cancel{\lim_{y\to\infty}} \left[e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{x}$ en inversant les bornes.

$= e^{-x^2} - 0 = e^{-x^2}$

3) Une telle densité est $g : x \mapsto \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$

4) Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

$E(Z^2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ par parité.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc par linéarité d'intégrales $E(X)$ existe et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} -2x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= -2 \times \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5) $\forall x \in \mathbb{R}_+, P(Z \leq x) = G(x)$

$$= P(|X| \leq \sqrt{x})$$

$$= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$$

$= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ car X est à densité

$\cancel{= 1 + 2\sqrt{x}e^{-x}}$.

$$= 1 - e^{-x}$$

G coïncide avec la fonction de répartition de S où $S \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$,

donc $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

6) $E(Z) = 1 \Rightarrow E(X^2) = 1$.

Par la formule de Koenig Huygens, X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

7)
```
def simulX(n):
    M=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        M[i] = -np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M.
```

```
def Esperance_X(n):
    ~~return ((1/n) * np.sum~~
    S=0
    for i in range(n):
        S= S+ simulX(n)[i]
    return ((1/n) * S).
```

On utilise alors le fait que, comme X admet espérance et variance, $S_n \xrightarrow{P} E(X)$ où $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1} X_i$ où $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ suivent même loi que X (par la loi faible des grands nombres).

Partie 2 :

8) h est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.

$\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^0 h(x)\,dx$ convergent et valent 0.

car aucun problème en 0 et 1

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx$

$$= 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

h peut être considérée comme une densité de probabilité.

9) $\forall x \in \mathbb{R}$,

si $x > 1$: $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(x)\,dx$

$$= \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$= 1.$$

Si $x < 0$: $H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(x)\,dx = 0.$

si $x \in [0;1]$: $H(x) = \int_0^x h(x)\,dx = 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right).$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 1 \\ 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \text{ si } x \in [0;1]. \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

10) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$

$$= P\left(M_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right).$$

Si $x < -\sqrt{n}$, comme $M_n(\Omega) \subset [0;1]$, on a $F_n(x) = 0$ et F_n coïncide alors avec $x \mapsto \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$ lui aussi nul sur $]-\infty; -\sqrt{n}[$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x > 0$, $F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = 1$

Si $x \in [-\sqrt{n}; 0]$: $F_n(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left[Y_i \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right]\right)$

$$= \prod_{i=1}^{n} P\left(Y_i \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$ par indépendance

$$= \left(H\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)\right)^n$$ car même loi.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \left(H\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

11) $\forall y \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)}$.

$\frac{y}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{y}{n}$

$\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} y$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) = y$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{y}{n}\right)^n = e^y$ par continuité de l'exponentielle en y.

12) $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ donc, $\forall x < 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $-\sqrt{n} < x$.

$\forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x < 0. \end{cases}$

car $H\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{\left(1+2\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{n}\right)}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}$ par 1).

Donc $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ car, $\forall x\in\mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x\geq 0 \\ e^{-x^2} \text{ si } x\leq 0. \end{cases}$

Problème :

1) Par récurrence :

Si $n=0$: $B_0 = \frac{1}{4^0}\times\binom{0}{0} = 1$ et $\prod\limits_{k=1}^{0}\frac{k+n}{4k} = 1$ donc l'égalité est vérifiée.

~~Si $n\geq 1$: $B_n = \frac{1}{4^n}\times\frac{(2n)!}{n!\,n!}$~~

Supposons, pour $n\in\mathbb{N}$ posé, que $B_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}$.

$$B_{n+1} = \frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}B_n$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}\times\frac{(n+1)2(2n+1)}{(n+1)(n+1)4}$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}\times\frac{2(2n+1)}{4(n+1)}.$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}\frac{k+(n+1)}{4k}.$$ Cela achève la récurrence.

Donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}$.

```
def B(n):
    P = 1
    for k in range(1, n+1):
        P = P*((k+n)/(4*k))
    return P.
```

Partie 2:

2) $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt$

$= \underline{\frac{\pi}{2}}$

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt$

$= \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \underline{1}$

3) $t \mapsto \sin(t)$ est à valeurs dans $[0;1]$ sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0;\frac{\pi}{2}[, \sin(t)^{n+1} \leqslant (\sin(t))^n$.

En intégrant avec $\frac{\pi}{2} > 0$, par continuité des fonctions en jeu, $W_{n+1} \leqslant W_n$ par théorème de croissance de l'intégrale : $\underline{(W_n) \text{ est décroissante}}$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 297	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \sin^2(t)\, dt$.

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n\, dt - \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \cos^2(t)\, dt.$$

Or, posons $\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\begin{cases} u(t) = \frac{\sin(t)^{n+1}}{n+1} \\ v(t) = \cos(t) \end{cases}$

avec u et v C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $\begin{cases} u'(t) = \cos(t)\sin(t)^n \\ v'(t) = -\sin(t). \end{cases}$

Par intégration par partie,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \cos^2(t)\, dt = \left[\frac{1}{n+1} \sin(t)^{n+1} \cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\, dt$$

$$= \frac{1}{n+1} W_{n+2}.$$

Donc $W_{n+2} + \frac{1}{n+1} W_{n+2} = W_n$ soit $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) Par récurrence :

Si $n=0$: $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \times B_0 = \frac{\pi}{2}$. Donc $W_0 = \frac{\pi}{2} \times B_0$.

Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$ posé, $W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$.

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2}$$
$$= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$$
$$= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\pi}{2} \times B_n$$
$$= \frac{\pi}{2} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{4k} \times \frac{2n+1}{(n+1)2}$$
$$= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{n+k+1}{4k}$$ car le terme du produit vaut $\frac{n+3}{4\times 2}$ au rang 2.

$$= \frac{\pi}{2} B_{n+1}$$

Donc cela achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n$.

7) par décroissance de (W_n),

$\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \leqslant W_{2n-1}$

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leqslant \frac{\pi}{2} B_n \leqslant \frac{1}{2nB_n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{2} B_n \geqslant \frac{1}{(2n+1)B_n} \Rightarrow B_n^2 \geqslant \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

$$\Rightarrow B_n^2 \geqslant \frac{2}{\pi(2n+2)}$$

$$\Rightarrow B_n^2 \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi(n+1} \geqslant \frac{1}{\pi(n+1)}$$

$$\Rightarrow B_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$$ par positivité des termes

et par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\pi}{2} B_n \leqslant \frac{1}{2n B_n} \Rightarrow B_n^2 \leqslant \frac{1}{n\pi}$$

$$\Rightarrow B_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}}.$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

~~8~~ 8) $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n \Rightarrow \sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}\right) / \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} = 1$. Par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \left(B_n / \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}\right) = 1$. Donc $\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}}$

Partie III :

9)

a) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ Y_k(\Omega) = \{0;1\}$.

$$P(Y_{k}=1) = P(X_k = 1).$$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \ Y_k \hookrightarrow \mathcal{B}(P(X_k=1))$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ E(Y_k) = P(X_k=1) = \frac{1}{2}$; $V(Y_k) = P(X_k=-1)P(X_k=1) = \frac{1}{4}$.

b) $X_1 \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants donc $X_1 \dots, X_n$ sont indépendants par lemme des coalitions.

Donc par stabilité par somme de la loi de Bernoulli,

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, P(X_1=1))$$

$$\text{donc } T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \underbrace{P(X_1=1)}_{=\frac{1}{2}}).$$

c) $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

$$(2T_n - n)(\Omega) = \{2j-n, j \in [\![0;n]\!]\}$$
$$= S_n(\Omega).$$

$\forall j \in [\![0;n]\!], \ P(S_n = 2j-n) = P(T_n = j)$

$$= \binom{n}{j}(P(X_1=1))^j (P(X_1=-1))^{n-j}$$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 237 | Nombre de pages : | Session : 2025

Épreuve de : MATHS EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10)

a) Il est impossible de retomber sur 0 en sommant au bout d'un nombre impair d'épreuves donnant à chaque fois 1 ou -1.

Nécessairement $\text{Card}(\{k \in [\![1;n]\!], S_{2k}=0\}) = \text{Card}(\{k \in [\![1,2n]\!], S_k = 0\})$
$= R_n$.

b) $P(S_{2k}=0) = P(T_{2k}=k)$
$= \binom{2k}{k} P(X_1=1)^k P(X_1=-1)^{2k-k}$
$= \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$
$= B_k$

c) $R_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$.

d) 1_{A_k} suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(S_{2k}=0)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc par linéarité $E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} E(1_{A_k})$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(S_{2k} = 0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B_k$$

11) $h : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ donc sur $[k;k+1]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Par théorème des accroissements finis,

$$\exists!\ c \in [k;k+1],\ h'(c) = \frac{h(k+1) - h(k)}{k+1-k}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Or la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ donne que

$h'(c) \leq h'(k)$

donc $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Le même raisonnement sur $[k-1;k]$, avec la dérivabilité acquise pour $]k-1;k[$ seulement, donne en rassemblant :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

12) En sommant l'inégalité,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n} 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\sqrt{\pi}$$

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{\pi}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{n})\sqrt{\pi}.$$

OSC.

Partie 4 :

13) $\forall x \in [0;4[,\ \left|\frac{x}{4}\right| < 1.$

$$0 \leq \left|\frac{x}{4}\right|^n \sqrt{n\pi} \leq n\sqrt{\pi}\left|\frac{x}{4}\right|^n.$$

$\sqrt{\pi}\sum_{n\geq 1} n\left|\frac{x}{4}\right|^n$ est une série géométrique de dérivée première convergente donc par critère de comparaison $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{4}\right)^n\sqrt{n\pi}$ converge. Donc par critère d'équivalence par le 13)a), comme pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \geq 0 \\ \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \geq 0 \end{cases}$, on a la convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

14) $\forall (x,y) \in [0;4[$, $x^n \leq y^n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \frac{y^n}{\binom{2n}{n}}.$$ Par convergence des

séries en jeu, $f(x) \leq f(y)$ f est croissante.