Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 21	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

1) Si $\ell \neq 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$. Alors $\mathrm{Im}(\ell) = \mathbb{R}$, ℓ est surjective.

pour $(a,x) \in E^2$, $\langle a, x\rangle \in \mathbb{R}$ et l'espace d'arrivée de ℓ est $\mathbb{R}$. L'existence d'un vecteur a_0 tel que $\ell(x) = \langle a_0, x\rangle$ est vérifiée. Si $\ell = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$ $a_0 \in E^{\perp} = \{0\}$.

· unicité : soit $(a_0, b_0) \in E^2$ tel que, $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle x, a_0\rangle_E = \langle x, b_0\rangle_E$.

On suppose par l'absurde.

Alors, $\forall x \in E$, $\langle x, a_0\rangle - \langle x, b_0\rangle = \langle x, a_0 - b_0\rangle$ par bilinéarité du produit scalaire $= 0$.

Donc $a_0 - b_0 \in E^{\perp}$ soit $a_0 - b_0 \in \{0_E\}$.

Donc $a_0 = b_0$ et on a l'unicité.

$\exists! a_0 \in E, \forall x \in E, \ell(x) = \langle x, a_0\rangle$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2)

On fait de même en posant $l_2 \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$.

~~Alors; $\exists!$~~

$\forall x \in E, \exists!\, b_0, \ l_2(v(x)) = \langle b_0, v(x) \rangle$.

Car en effet $\mathrm{Im}(v) \subset F$.

En posant $b_0 = y$ et $a_0 = Z_y$ précédemment posé, sous réserve que v et l ne soient pas des applications nulles, on peut affirmer l'unicité des y, Z_y tel que $\langle v(x), y \rangle = \langle Z_y, x \rangle$

Si $x = 0$, ou $v = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$, le résultat est vérifié.

3) Montrons, $\forall (y, w) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, Z_{\lambda y + w} = \lambda Z_y + Z_w$.

On sait que $\forall x \in E$ $\langle v(x), \lambda y + w \rangle_F = \langle Z_{\lambda y + w}, x \rangle_E$

Or $\langle v(x), \lambda y + w \rangle_F = \lambda \langle v(x), y \rangle_F + \langle v(x), w \rangle_F$
par bilinéarité

$= \lambda \langle Z_y, x \rangle_E + \langle Z_w, x \rangle$.

2/

Par unicité, on a $\lambda\langle z_y, x\rangle + \langle z_w, x\rangle = \langle z_{\lambda y+w}, x\rangle$

soit $z_{\lambda y + w} = \lambda z_y + z_w$.

Donc u^* est linéaire.

4) $(f_1, \dots, f_n)$ est orthonormale donc,

$\forall i \in [\![1;p]\!]$, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \langle u(e_i), f_k\rangle f_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, u^*(f_k)\rangle f_k .$$

Or $A = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), f_1\rangle & \dots & \langle u(e_p), f_1\rangle \\ \vdots & & \\ \langle u(e_1), f_n\rangle & & \end{pmatrix} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Donc ${}^tA = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), f_1\rangle & \dots & \langle u(e_1), f_n\rangle \\ \vdots & & \\ \langle u(e_p), f_1\rangle & \dots & \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$= \begin{pmatrix} \langle e_1, u^*(f_k)\rangle & \dots & \langle e_1, u^*(f_n)\rangle \\ \vdots & & \\ \langle e_p, u^*(f_1)\rangle & & \end{pmatrix}$

par unicité des coefficients.

Et comme $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormale,

$\forall i \in [\![1;n]\!]$ $u^*(f_i) = \sum_{k=1}^{p} \langle u^*(f_i), e_k \rangle e_k$ donc on

retrouve $\underline{\underset{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}{\mathrm{Mat}}(u^*) = {}^tA.}$

~~5) 2 matrices~~

Une matrice et sa transposée ont le même rang

donc $rg(A) = rg({}^tA)$

soit $\underline{rg(u^*) = rg(u)}$

$\underset{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}{\mathrm{Mat}}((u^*)^*) = {}^t({}^tA)$

$= A.$

$\underset{B_F, B_E}{\mathrm{Mat}}((u^*)^*) = \underset{B_F, B_E}{\mathrm{Mat}}(u)$ donc u et $(u^*)^*$ coincident

sur la base $(e_1, \dots, e_p)$ donc $\underline{(u^*)^* = u.}$

5) $\forall z \in \mathrm{Im}(u^*)$, $\exists y \in F$, $z = u^*(y)$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}(u)$, $\langle z, x \rangle = \langle y, u(x) \rangle$

$= \langle y, 0 \rangle = \underline{0}$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\operatorname{Im}(u^\circ) \subset (\operatorname{Ker}(u))^\perp$

~~C'est vrai~~

~~$\forall z \in (\operatorname{Ker}(u))^\perp, \forall x \in \operatorname{Ker}(u), \langle z, x \rangle = 0$.~~

Or $rg(u^\circ) = rg(u)$ donc, comme F est euclidien,

$\dim(\operatorname{Ker}(u)^\perp) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(u))$

$= rg(u)$ par théorème du rang.

Donc $\dim(\operatorname{Ker}(u)^\perp) = \dim(\operatorname{Im}(u^\circ))$ donc par l'inclusion on a $\operatorname{Im}(u^\circ) = \operatorname{Ker}(u)^\perp$

6) $\forall x \in \operatorname{Ker}(u), u^\circ \circ (u(x)) = u^\circ(0_F)$

$= 0_E$ car $u^\circ \in \mathcal{L}(F, E)$

Donc $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(u^\circ \circ u)$.

Pour $x \in \operatorname{Ker}(u^\circ \circ u)$, représenté par $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$, on a ${}^tAAX = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc ${}^t X {}^t A A X = 0$ soit $\|AX\|_p^2 = 0$

donc $AX = 0$.

$x \in \mathrm{Ker}(u)$.

Donc $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u^* \circ u) = \mathrm{Ker}(u)$.

· $\mathrm{Im}(u^* \circ u)$ et $\mathrm{Im}(u^*)$ sont tous deux sous-espaces de E.

$rg(u^*) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u^*))$

$= \dim(E) - \dim((\mathrm{Ker}(u))^{\perp\perp})$ car E est euclidien

$= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u))$

$= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u^* \circ u))$ par 6)

$= rg(u^* \circ u)$

Or $\mathrm{Im}(u^* \circ u) \subset \mathrm{Im}(u^*)$ car, $\forall x \in \mathrm{Im}(u^* \circ u)$,

$\exists y \in E$, $x = (u^* \circ u)(y)$. Donc $x = u^*(u(y))$ soit

$x \in \mathrm{Im}(u^*)$.

7) ~~par composée d'endomorph~~

Par composée d'applications linéaires et comme $Im(v^a)$ est espace d'arrivée et de départ de w, on a $w \in \mathcal{L}(Im(v^a))$

Or $Im(v^a \circ u) = Im(v^a)$ par 6) donc

$Im(w) = Im(v^a)$ donc w est surjectif.

Or ~~les e~~ w est un endomorphisme donc est un isomorphisme de $Im(v)$.

Ainsi $\underset{Im(v^a)}{Mat}(w)$ est inversible car $rg(\underset{Im(v^a)}{Mat}(w))$

$= rg(w)$

$dim(Im(v^a))$

8) ${}^tAQ$

b) ~~le projecteur associé à Q par une base ortho~~

π est symétrique donc, étant un projecteur, $Sp(\pi) = \{0; 1\}$.

Donc, étant diagonalisable, Q est semblable à

$\mathrm{Diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\times \dim(E_1(\pi)) \text{ fois}}, 0, 0)$ en réordonnant comme on veut

Donc $tr(Q) = \dim(E_1(\pi))$

$= \dim(\mathrm{Im}(\pi))$ car $\mathrm{Im}(\pi) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(\pi)$

$= rg(Q)$.

Or $rg(Q) = rg({}^tA)$

$= rg({}^tAQ)$ par 8) a)

$= rg({}^t({}^tAQ))$

$= rg({}^tQA)$

$= rg(QA)$ car Q symétrique

$= rg(Q)$ car $\mathrm{Im}(QA) \subset \mathrm{Im}(Q)$ et parce qui précède.

$= tr(Q)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

9) Si $rg(A) = p$ alors $rg({}^tA) = p$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(v^\circ)) = p$

Donc $\mathrm{Im}(v^\circ) = E$ car $\mathrm{Im}(v^\circ) \subset E$

Donc on identifie $w = v^\circ \circ v$

donc, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}(w)}(w)$ est inversible, M est inversible.

~~Si $rg(A) = p$: A~~

Si M est inversible, alors $rg(M) = p$

donc $rg(A) = p$ car

$rg(v) = rg(v^\circ \circ v)$. ~~soit~~

10) a) On sait que ~~${}^tA\,Q = {}^tA$~~ ${}^tAQ$

M^{-1} existe car $rg(A) = p$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$M(M)^{-1}\,{}^tA = I_n\,{}^tA$.

$= {}^tA$.

~~Donc~~ $= {}^tA\,Q$.

Donc ${}^tA\,Q = {}^tA\,A(M)^{-1}\,{}^tA$.

Donc, $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tA\,Q\,X = {}^tA\,A(M)^{-1}\,{}^tA\,X$.

b) def Calcule_Q(A):

```
M=np.dot(np.transpose(A), A).
if al.matrix_rank(M) == p :
    return np.dot(np.dot(A), al.inv(M)), np.transpose(A))
else :
    return ("erreur")
```

(ii) ${}^tM = {}^t({}^tAA)$

$= {}^tA\,{}^t({}^tA)$

$= {}^tAA = M$.

M est symétrique, donc diagonalisable, donc il existe une base orthonormale de vecteurs propres $(X_1 .., X_p)$. avec $Sp(M) = \{\lambda_1 .., \lambda_p\}$

~~$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \exists (X_1', ... X_p') \in E_{\lambda_1}(M) \times ... \times E_{\lambda p}(M), X = \sum_{i=1} X_i'$.~~

$\forall i \in [[1 ; p]], M X_i = \lambda_i X_i$

${}^tX_i M X_i = \lambda_i {}^tX_i X_i$ soit $||AX|| = \lambda_i ||X_i||^2$

Or $\|X_i\| > 0$ car $X_i \neq 0$.

Donc $\lambda_i = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

$\Rightarrow Sp(M) \subset \mathbb{R}_+$.

$\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \exists (X_1', \dots, X_p') \in E_{\lambda_1}(M) \times \dots \times E_{\lambda_p}(M)$,
$X = \sum_{i=1}^{p} X_i'$.

Donc $\langle X, MX \rangle = {}^t X M X$

$$= {}^t\left(\sum_{i=1}^{p} X_i'\right) \times \sum_{j=1}^{p} M X_j'$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, {}^t X_i' \cdot X_j'$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \|X_i\|^2 \text{ car } X_i \perp X_j \text{ si } i \neq j$$

≥ 0 par somme de réels positifs.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES I

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie II :

12) $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \forall H \in M_{p,1}(\mathbb{R}), J_0(X+H) - J_0(X)$

$= \frac{1}{2}\|A(X+H) - Y\|^2 - \frac{1}{2}\|AX - Y\|^2$

$= \frac{1}{2}(\|A(X+H)\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle A(X+H), Y\rangle - \|AX\| - \|Y\| + 2\langle AX, Y\rangle$

$= \frac{1}{2}(\|A(X+H)\|^2 - \|AX\|^2 - 2\langle AH, Y\rangle).$

$= \frac{1}{2}(\|AX\|^2 + \|AH\|^2 + 2\langle AX, AH\rangle - \|AX\|^2 - 2\langle AH, Y\rangle$

$= \frac{1}{2}\|AH\|^2 + \langle AH, AX - Y\rangle$

$= \frac{1}{2}{}^tHMH + {}^tH\,{}^tA(AX - Y)$

$= \frac{1}{2}{}^tHMH + {}^tH(MX - {}^tAY)$

$= \boxed{\frac{1}{2}{}^tHMH + \langle H, D(X)\rangle}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13) Si $P(X)=0$:

$\forall H \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, $\forall X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$

$J_0(X+H) - J_0(X) = \frac{1}{2} {}^tHMH$

≥ 0 par 11).

Donc J_0 admet un minimum global en X.

• Supposons que J_0 admette un minimum global en X.
Comme $M_{p,1}(\mathbb{R})$ est euclidien, par théorème de caractérisation par minimisation de la norme, ce minimum est unique et atteint en $p_{Im(A)}(Y)$ où p est le projecteur orthogonal sur $Im(A)$. On a $p_{Im(A)}(Y) = AX_0$.

Donc $D(p_{Im(A)}(Y)) = {}^tA \times p_{Im(A)}(Y) - {}^tA\, Y$

$= {}^tA(p_{Im(A)}(Y) - Y)$

$= 0$ car $p_{Im(A)}(Y) - Y) \in Ker(A)$

$\in (Im({}^tA))^\perp$

car E est euclidien et par 5) $Im(u^*) = Ker(u)^\perp$.

D'où l'équivalence : J_0 possède un minimum global en un point $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $D(X) = 0$.

14) On pose $X_0 = p_{Im(A)}(Y)$ car on a vu $D(X_0) = 0$

et $p_{Im(A)}(Y) \in (Ker(A))^{\perp}$ car p est le projecteur orthogonal sur $Im(A)$.

15) $X \in S_0 \Rightarrow D(X) = 0$

$\Rightarrow MX - {}^tAY = 0$

~~$\Rightarrow {}^tA(AX - Y) = 0.$~~

$\Rightarrow MX - {}^tAQY = 0$ par 8)a)

$\Rightarrow {}^tA(AX - QY) = 0.$

~~Or $\Rightarrow AX = QY$ car $rg({}^tA) = p$ donc le système admet une unique solution.~~

$\Rightarrow AX = QY$ car $Im({}^tA) = (Ker(A))^{\perp}$.

b) $A(X - X_0) = AX - AX_0$ ~~car~~

$= QY - QY$ car $(X, X_0) \in (S_0)^2$

$= 0.$

$X - X_0 \in Ker(A)$

b) Supposons $X \neq X_0$.

$X - X_0 \in Ker(A) \Rightarrow$

c) $rg(A) = p \Rightarrow rg({}^tAA) = p$

$\Rightarrow$ M est inversible.

Donc $D(X) = 0 \Leftrightarrow MX - {}^tAY = 0$

$\Leftrightarrow MX = {}^tAY$. On a l'unicité de la solution

car M est inversible donc S_0 contient un seul élément.

$\Leftrightarrow X = M^{-1}\,{}^tAY$

$\Rightarrow S_0 = \{X\} \mid X = M^{-1}\,{}^tAY$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 282

Nombre de pages :

Session : 2025

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~16)~~

~~a) $T = \|A(X - V_0)\|^2$~~

~~$= \|AX - AV_0\|^2$~~

$= \|AX - QAV_0\|^2$

On admet $T = \|QZ\|^2$.

Alors $T = {}^t(QZ) \times QZ$

$= {}^tZ\,{}^tQ\,Q\,Z$

$= {}^tZ\,Q\,Z$ car Q est la matrice d'un projecteur orthogonal donc ${}^tQQ = Q^2 = Q$.

b)

```
def simule T(A, sigma):
    Z = rd.normal(0, sigma, n)
    return (np.dot(np.dot(Z, Calcule_Q(A)), np.transpose(Z)))
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~b)~~ c) def esperance (A, signa) :

```
    S = np.zeros(10000)
    for i in range(10000) :
        S[i] = simuleT(A, signa)

    return (np.sum(S) / 10000).
```

~~d) On peut conjecturer que $E(T)$ = nombre de colonnes de A.~~

d) On conjecture $E(T) = rg(A)$ car les matrices (notamment la dernière) sont echelonnées.

e) $E(Z_1^2) = V(Z_1) + (E(Z_1))^2$

$= V(Z_1)$

$= \sigma^2$.

$x \mapsto x^3 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Or $\frac{x^5}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $x^3 f_{Z_1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente et, $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$.

Par critère de negligeabilité $\int_1^{+\infty} x^3 f_{Z_1}(x)\,dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} x^3 f_Z(x)\,dx$ converge par continuité de $x \mapsto x^3 f_Z(x)$

sur $[0;1]$.

Donc $E(Z_1^3)$ existe et vaut 0 par imparité.

On pose, $\forall A > 0, \forall t \in [0;A]$, $\begin{cases} u(t) = xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ v(t) = 3x^2 \end{cases}$

c'est l'inverse

avec u et v de classe C^1 sur $[0;A]$

$\begin{cases} u'(t) = -\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\ v'(t) = x^3 \end{cases}$

Par intégration par partie

$$\int_0^A x^4 f_{Z_1}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^A x^3 \times xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\left[-x^3\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_0^A + \int_0^A \sigma^2 3x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \right]$$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \sigma^2 3 E(Z_1^2) = 3\sigma^4$ par croissance comparée

8) $T_1 + 2T_2 = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + 2 \times \sum_{1 \leq j < i \leq n} Q_{i,j} z_i z_j$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} z_i^2 + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} Q_{i,j} z_i z_j$ car

Q est symétrique.

$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} Q_{i,j} z_i z_j$

$= {}^tZ\, Q Z$

$= T.$

Soit $T = T_1 + 2T_2$.

$E(T) = \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i} E(z_i^2) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} E(z_i z_j)$ par

linéarité de l'espérance

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}\, \sigma^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} Q_{i,j} E(z_i) E(z_j)$ car

l'indépendence mutuelle des $z_1, \dots, z_n$ donne $E(z_i)E(z_j) = E(z_i z_j)$ pour $j \geq i+1$

$= \sum_{i=1}^{n} Q_{i,i}$. Donc, par 8)b), $E(T) = tr(Q)$
$= rg(A)$, d'où

la conjecture.

Copie anonyme - n°anonymat :

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** | **Session :** 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES I

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$$\cancel{17)\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^n,\ \forall t>0,\ \frac{\|u-tv\|-\|u\|}{t} = \frac{\sqrt{\sum (u_i - tv_i)^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}}{t}}$$

17) $\forall u=(u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n, \forall v=(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n, \forall t>0,$

$$\left|\frac{\|u+tv\|-\|u\|}{t} - \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|}\right| = \left|\frac{\|u\|(\|u+tv\|-\|u\|) - t\langle u,v\rangle}{t\|u\|}\right|$$

$$\leq \frac{|\|u\|(\|u+tv\|-\|u\|)| + |-t\langle u,v\rangle|}{t\|u\|}$$

$$\leq \frac{\|u\|\,|(\|u+tv\|-\|u\|)| + t|\langle u,v\rangle|}{t \times \|u\|}$$

$$\leq \frac{\|u\|\,|(\|u+tv\|-\|u\|)| + t\|u\|\|v\|}{t \times \|u\|}$$

par Cauchy-Schwarz

$$\leq \frac{\|u\|(\|u+tv\|-\|u\|+\|v\|)}{t(\|u\|)}.$$