Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 21	Session : 2015

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème I :

Partie I :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[-1;1]$ et $[0;-1]$. I_n et J_n existent donc.

$t \mapsto (1-t^2)^n$ est paire car sur $[-1;1]$ car $[-1;1]$ est centré en 0.

Par existence des intégrales en jeu, $J_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$

$= 2 I_n$.

2) $I_0 = \int_0^1 (1-t^2)^0 \, dt$

$= \int_0^1 dt$

$= 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) $\forall t \in [0;1]$, $1-t^2 \leq 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(1-t^2)^{n+1} \leq (1+t^2)^n$ car $(1-t^2)^n > 0$

En intégrant avec $1 > 0$, $\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$.

(I_n) est décroissante.

4) On pose, $\forall t \in [0,1]$ $\begin{cases} u(t) = (1-t^2)^n \\ v(t) = t \end{cases}$

avec u et v de classe C^1 sur $[0;1]$ et $\begin{cases} u'(t) = -2nt(1-t^2)^{n-1} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$

Par intégration par partie,

$I_n = [(1-t^2)^n t]_{-1}^{1} + 2n\int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt$.

$= -2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt$.

Une deuxième intégration par partie avec, pour $t \in [0;1]$, $w(t) = (1-t^2)^n$ et $z(t) = t$, avec w et z C^1 sur $[0;1]$, donne $-\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\,dt = [(1-t^2)^n t]_0^1$

$- \int_0^1 2n(1-t^2)^{n-1}\,dt$

$=$

Or $+2n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{n-1}\,dt = +2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}(1-(1-t^2))\,dt$

$$= 2n\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\,dt - 2n\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt.$$

Donc $(2n+1)I_n = 2n I_{n-1}$ soit $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

5) si $n=0$: $I_0 = 1$ et $\frac{(2^0\, 0!)^2}{(2\times 0+1)!} = 1$. L'initialisation est vraie.

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ posé que $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$.

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} I_n$$

$$= \frac{(2^n n!)^2\, 2(n+1)}{(2n+3)\times(2n+1)!}$$

Soit $I_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\times(2n+2)\times(n!\,2^n)^2}{(2n+3)!}$

$$= \frac{2^2(n+1)^2\times(n!\,2^n)^2}{(2(n+1)+1)!}$$

$$= \frac{((n+1)!\,2^{n+1})^2}{(2(n+1)+1)!}.$$

Cela achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

$J_n = 2 I_n$

$$= \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

6) def I(n):

```
    i = 1
    for K in range(1, n+1):
        i = ((2*K) / (2*K+1)) * i
    return (i).
```

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 195	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

7) $$J_n = 2 \times \frac{\left(2^{n}(n!)\right)^2}{(2n+1)!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2 \times 2^{2n} \times \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{(2n+1)!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1} \times 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}\sqrt{\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}$$

Or $\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1} = e^{(2n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{e}\right)}$

donc $\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} / \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1} = \left(\frac{2n+1}{e}\right) \times \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\frac{n}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

Partie I° pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $t \mapsto P(t)Q(t)$ est bien continue sur $[-1;1]$.
Notons $\langle ..., ... \rangle$ cette application qui va de $(\mathbb{R}[x])^2$ dans $\mathbb{R}$.

Symétrie :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[x])^2, \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\,dt$$

par commutativité des produits de réels

$$= \langle Q, P \rangle.$$

$\langle ..., ... \rangle$ est symétrique.

· Bilinéarité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P,Q,H) \in (\mathbb{R}[x])^3, \int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t) H(t)\,dt$$

$$= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)H(t)\,dt + \int_{-1}^{1} Q(t)H(t)\,dt$$ par linéarité de l'intégrale

$$= \lambda \langle P, H \rangle + \langle Q, H \rangle.$$

Donc $\langle \lambda P + Q, H \rangle = \lambda \langle P, H \rangle + \langle Q, H \rangle$ donc $\langle ..., ... \rangle$ est linéaire sur une variable, symétrique, donc bilinéaire.

Positivité :

$\forall P \in \mathbb{R}[x], \forall x \in \mathbb{R}, (P(x))^2 \geqslant 0$.

En intégrant avec $1 \geqslant -1$, $\int_{-1}^{1}(P(t))^2 dt \geqslant 0$.

Donc $\langle .., .. \rangle$ est positive.

Définie :

Si pour $P \in \mathbb{R}[x]$, $\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt = 0$, alors comme $P^2 \geqslant 0$, par théorème de stricte positivité pour les intégrales on a que $\int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \Rightarrow \forall t \in [-1;1], (P(t))^2 = 0$

$\Rightarrow \forall t \in [-1;1], P(t) = 0$.

Donc P admet une infinité de racines soit $P = 0$ et $\langle .., .. \rangle$ est définie.

$\langle .., .. \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}(x)$.

g) $\langle B_0, B_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx$

$= 2\int_{0}^{1} x^2 dx$ par parité de $x \mapsto x^2$ sur $[-1;1]$

> 0 car, $\forall x \in]0;1], x^2 > 1$ (théorème de stricte positivité. Les polynomes de B_n ne sont pas

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

deux à deux orthogonaux.

9) $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, v(\lambda P+Q)(x) = ((1-x^2)(\lambda P+Q)'(x))'$

Soit $v(\lambda P+Q)(x) = (1-x^2)(\lambda P+Q)''(x) - 2x(\lambda P+Q)'(x)$

$= \lambda\left[(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x)\right] + (1-x^2)Q''(x) - 2xQ'(x)$

$= \lambda v(P)(x) + v(Q)(x).$

Donc v est linéaire.

Or, par produit et dérivée, pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $v(P)$ est un polynome.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, $\deg(P') \leq n-1$

$\deg(x \mapsto P'(x)(1-x^2)) \leq n+1$

$\deg(x \mapsto (P'(x)(1-x^2))') \leq n.$

Donc $v(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ et v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1) a) ~~e_0 est paire~~

$e_0' \underset{\mathbb{R}_n[x]}{=} 0$ donc par produit et dérivée $v(e_0) = 0$

$e_1' = e_0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(e_1)(x) = ((1-x^2)e_0(x))'$

$= -2x$

$= -2e_1(x)$.

$v(e_1) = -2e_1$

b) ~~X~~

~~X~~

$\forall x \in \mathbb{R}$, $v(e_K)(x) = (1-x^2)e_K''(x) - 2x e_K'(x)$

$= (1-x^2) \times K \times (K-1) e_{K-2}(x) - 2x K e_{K-1}(x)$

$= K \times (K-1) e_{K-2}(x) - K(K-1)e_K(x) - 2K e_K(x)$

$= K \times (K-1) \times e_{K-2}(x) + e_K(x)(-K(K-1) - 2K)$

$= K(K-1)e_{K-2}(x) - K(K+1)e_K(x)$

c) Donc $\underset{B_n}{\mathrm{Mat}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \vdots & 0 \\ \vdots & -2 & & 0 & \vdots \\ & \vdots & \ddots & (n-2)(n-1) & 0 \\ & & & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & (0) & -n(n-1) & 0 \\ & & & & -(n+1)n \end{pmatrix}$.

$\underset{B_n}{\mathrm{Mat}}(v)$ est triangulaire supérieur donc $Sp(v)$ vaut

$\{-2K(K+1), K \in \mathbb{N}\}$.

Or $\mathrm{Card}(Sp(v)) = n+1$, ses éléments sont deux à deux distincts donc v est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

12) On pose, $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, $\forall x \in [-1;1]$ $\begin{cases} v(x) = (1-x^2)P'(x) \\ w(x) = Q(x) \end{cases}$

avec v et w de classe C^1 sur $[-1;1]$ et $\begin{cases} v'(x) = v(P)(x) \\ w'(x) = Q'(x). \end{cases}$

Par intégration par partie,

$\langle v(P), Q\rangle = \left[(1-x^2)P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)Q'(x)dx.$

Donc comme $\left[(1-x^2)P(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}=0$ et $\int_{-1}^{1} P(t)Q'(t)(1-t^2)\,dt$ vaut

$\int_{-1}^{1}(1-t^2)Q'(t)P'(t)\,dt$, une 2° intégration par partie

donne $\langle v(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)P(t)v(Q)(t)\,dt$.

Ainsi v est symétrique donc il existe une base orthonormale de vecteurs propres de v. Soit $(T_0, \dots, T_n)$ une telle base, et $a_{T_1}, \dots, a_{T_n}$ leurs coefficients dominants respectifs.

Alors, en posant : $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $L_i = \frac{T_i}{a_{T_i}}$, on conserve l'aspect orthogonalité et base de la famille $(L_1, \dots, L_n)$ et chaque coefficient dominant vaut 1.

13) $\mathbb{R}[x]$ est un espace euclidien et admet pour sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.

Soit p_n le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_n[x]$.

Par théorème de caractérisation par minimisation de la norme, $\|f-g\|_{g\in\mathbb{R}_n[x]}$ admet un unique minimum $p_n(f) = T_n$.

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES EM

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

$T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ donc, $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[x]$, $\exists (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid T_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$.

$\forall k \in [\![0;n]\!]$, $c_k = \dfrac{\langle g, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$.

b) $\|g - T_n\|^2 + \|T_n\|^2 = \|g\|^2$ par théorème de Pythagore car $g - T_n \in (\mathbb{R}_n[x])^{\perp}$.

Donc $\|g - T_n\|^2 = \|g\|^2 - \|T_n\|^2$

$$= \|g\|^2 - \left\|\sum_{k=0}^{n} c_k L_k\right\|^2$$

$$= \|g\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|L_k\|^2.$$

c_k a été précisé.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

14)

a) Par récurrence :

si $K=0$: $\frac{(2\times 0)!}{0!}=1$ et $Q_0=1$ donc Q_0 est de degré 0.

Ainsi l'initialisation est vérifiée.

Supposons pour $K\in\mathbb{N}$ posé que Q_K est de degré K, de coefficient dominant $\frac{(2K)!}{K!}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $Q_{K+1}(x)=(x^2-1)P_K(x)$.

$$Q_{K+1}^{(K+1)}(x)=\sum_{i=0}^{K+1}\binom{K+1}{i}x\mapsto(x^2-1)^{(K-i+1)}P_K^{(i)}(x)$$ par

la formule de Leibniz car $x\mapsto x^2-1$ et Q_K sont de classes C^∞ et C^K sur $\mathbb{R}$

$$=\underbrace{\binom{K+1}{K-2}x\mapsto x^2-1^{(2)}\,P_K^{(K-1)}(x)}_{C(x)}+\underbrace{\binom{K+1}{K}x\mapsto x^2-1^{(1)}\times P_K^{(K)}(x)}_{B(x)}+\underbrace{\binom{K}{K}x\mapsto x^2-1^{(0)}\times P_K^{(K+1)}(x)}_{A(x)}.$$

Or $C(x)$ admet pour coefficient dominant

b) $Q_0 = P_0$

$Q_1 = P_1'$

$= x \mapsto 2x$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$Q_2(x) = P_2^{(2)}(x)$

$= \left(x \mapsto 4x(x^2-1)\right)'(x)$

$= 12x^2 - 4$ ..

c) i) $\forall K \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) \times P_K'(x) = x \times 2xK(x^2-1)^{K-1}$

$= 2K(x^2-1)^{K-1}x^2$

$= 2K P_K(x) e_1(x)$

ii) Par la formule de Leibniz, comme $x \mapsto 1-x^2$ et P_K sont de classe C^∞ et C^K,

$\forall x \in \mathbb{R}, \; P_1 P_K'^{(K+1)}(x) = \sum_{i=0}^{K+1} \binom{K}{i} P_1^{(K-i)}(x) P_K'^{(i)}(x)$

$= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K}{i} P_1^{(K-i+1)}(x) P_K^{(i+1)}(x)$

$+ \binom{K+1}{K-1} P_1^{(2)}(x) P_K^{(K)}(x) + \binom{K+1}{K} P_1^{(1)}(x) P_K^{(K+1)}(x) + \binom{K+1}{K+1} P_1^{(0)}(x) P_K^{(K+1)}(x).$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1 P_K^{(K+1)}(x) = \frac{(K+1)K}{2} \times 2 Q_K(x) + (K+1)2 e_1(x) Q_K'(x)$
$+ P_1(x) Q_K''(x)$

$= (K+1)K Q_K(x) + 2(K+1) e_1(x) Q_K'(x)$
$+ P_1(x) Q_K''(x)$.

En soustrayant l'égalité précédente,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) P_K'(x) - (2K e_1(x) P_K(x))^{(K+1)} = 0$

Donc $(1-x^2) Q_K''(x) - 2x Q_K'(x) + K(K+1) Q_K(x) = 0$

car $2K(e_1(x) P_K(x))^{(K+1)} = 2K e_1(x) Q_K'(x)$.

• $Q_K \neq 0$ car $\deg(Q_K) = K$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $u(Q_K)(x) = ((1-x^2) Q_K'(x))'$

$= (1-x^2) Q_K''(x) - 2x Q_K'(x)$

$= -K(K-1) Q_K(x)$ par ce qui précède.

Donc Q_K est vecteur propre de v associé à la valeur propre $-K(K+1)$.

iii) Pour $K \in [\![1;n]\!]$ $L_K \in E_{-K(K+1)}(v)$ et $Q_K \in E_{-K(K+1)}(v)$ or $\dim\left(E_{-K(K+1)}(v)\right) = 1$.

Donc L_K et Q_K sont colinéaires. Or L_K admet 1 pour coefficient dominant et Q_K admet $\frac{(2K)!}{K!}$ donc par théorème d'unicité des coefficients et par colinéarité,

$$\forall K \in [\![1;n]\!] \quad L_K = \frac{K!}{(2K)!} Q_K.$$

d) On admet pour $K=0$.

si $K=1$: $\forall (f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$, $\int_{-1}^{1} f^{(1)}(t) g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f'(t) g(t)\,dt$

Or $\sum_{j=0}^{1-1} (-1)^j \left[f^{(K-1-j)}(t) g^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} = \left[f(t) g(t)\right]_{-1}^{1}$

et $\int_{-1}^{1} g^{(1)}(t) f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} g'(t) f(t)\,dt$. Or par intégration par partie on a bien $\int_{-1}^{1} f'(t) g(t)\,dt = \left[f(t) g(t)\right]_{-1}^{1}$ $+ \int_{-1}^{1} g'(t) f(t)\,dt$.

Supposons cette égalité pour $K \in \mathbb{N}$ posé.

Par intégration par partie, pour tout $(f,g) \in (\mathbb{R}[x])^2$,

$$\int_{-1}^{1} f^{(K+1)}(t)g(t)dt = \left[f^{(K)}(t)\,g(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f^{(K)}(t)g'(t)dt.$$

Or $\int_{-1}^{1} f^{(K)}(t)g'(t)\,dt = \sum_{j=0}^{K-1}(-1)^j\left[f^{(K-1-j)}(t)\,g^{(j+1)}(t)\right]_{-1}^{1}$

$+(-1)^K\int_{-1}^{1} f(t)\,g^{(K+1)}(t)\,dt$ par hypothèse pour g'.

Donc $\int_{-1}^{1} f^{(K+1)}(t)\,g(t)\,dt = \left[f^{(K)}(t)g(t)\right]_{-1}^{1} + \underbrace{\sum_{j=0}}_{i=j+1}(-1)^j\left[f^{(K-j)}(t)\right.$

$\times \left. g^{(j+1)}(t)\right]_{-1}^{1} \underbrace{-(-1)^K}_{=(-1)^{K+1}}\int_{-1}^{1} f(t)\,g^{(K+1)}(t)\,dt$

$$= \left[\sum_{j=0}^{K}(-1)^j\left[f^{(K-j)}(t)\,g(t)\right]_{-1}^{1}\right.$$

$+ (-1)^{K+1}\int_{-1}^{1} f(t)g^{(K+1)}(t)\,dt$. Cela achève la récurrence.

L'égalité est ainsi vraie pour tout $K \in \mathbb{N}$

e)

i) Q_K est de degré K donc $Q_K^{(K)} = P_K^{(2K)}$ est de degré 0. Donc $P_K^{(2K)}$ est une constante qui vaut son coefficient dominant en produit avec $(2K)!$

A fortiori $P_K^{(2K)}$ vaut le coefficient dominant de D_K en produit avec $K!$ car $\deg(D_K) = K$.

Donc $P_K^{(2K)} = \frac{(2K)!}{K!} \times K!$

$= (2K)!$.

ii) si $l = 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_K^{(0)}(x) = P_K(x)$. donc $R_{K,0} = e_0$ convient. et

Supposons l'existence, pour $l \in [\![0;K]\!]$, d'un tel polynôme $R_{K,l}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P_K^{(l+1)}(x) = (P_K^{(l)})'(x)$

$= ((x^2-1)^{K-l} R_{K,l}(x))'$

$= (K-l)2e_1(x)(x^2-1)^{K-(l+1)} R_{K,l}(x)$

$+ (x^2-1)^{K-l} R_{K,l}'(x)$

$= (x^2-1)^{K-(l+1)} \underbrace{\left(2e_1(x)(K-l)R_{K,l}(x) + (x^2-1)R_{K,l}'(x)\right)}_{R_{K,l+1}(x)}$

Or $R_{K,l+1}$ est bien un polynôme par produit, dérivée et somme donc cela achève la récurrence.

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHÉMATIQUES EML

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

iii) $\forall \ell \in [\![0; K-1]\!]$, $R_K^{(\ell)}(-1) = (1+(-1)) R_{K,\ell}(-1)$

$$= 0^{*}$$

$$= (1-1)^2 R_{K,\ell}(1)$$

$$= P_K^{(\ell)}(1)$$

*En effet si $\ell < K$ alors $\deg(R_{K,\ell}) \geq 1$ car $\deg(P_K) > 2$.

$$\|Q_K\|^2 = \int_{-1}^{1} (Q_K(x))^2 \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (P_K^{(K)}(x))^2 \, dx.$$

Or, en utilisant la formule de l'Intégration par partie, généralisée, on a que $\int_{-1}^{1} P_K^{(K)}(x) P_K^{(K)}(x) dx = \sum_{j=0}^{K-1} \left[(-1)^j P_K^{(K-1-j)}(t) P_K^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1}$

$+ (-1)^K \int_{-1}^{1} P_K(t) P_K^{(2K)}(t) \, dt.$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Or $\sum_{j=0}^{K-1} \left[(-1)^j p^{(K-1-j)}(t) p^{(j)}(t)\right]_{-1}^{1} = 0$ par e) iii).

et $\int_{-1}^{1} P_K(t) P_K^{(2K)}(t)\,dt = (2K)! \int_{-1}^{1} P_K(t)\,dt$

$= (2K)!\ J_K$

$= \dfrac{2^{K+1}(K!)^2}{2K+1}.$

D'où $\|Q_K\|^2 = \dfrac{2^{2K+1}(K!)^2}{2K+1}$

Donc $\|L_K\|^2 = \dfrac{(K!)^2}{(2K)!^2} \times \|Q_K\|^2$

$= \dfrac{K!^4\, 2^{2K+1}}{(2K)!^2(2K+1)}$

Donc $\|L_K\| = \sqrt{\dfrac{(2^K)^2\, 2}{2K+1} \times \left(\binom{2K}{K}^2\right)^{-1}}$ car $\binom{2K}{K} = \dfrac{2K!}{K!K!}$

$= 2^K \sqrt{\dfrac{2}{2K+1}} \times \binom{2K}{K}^{-1}$

Problème 2 :

1) • par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.

• $\forall (A,B) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*,\ \int_B^A \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_B^A$

$$\underset{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\underset{\substack{A\to+\infty \\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ et f peut être considérée comme une densité de probabilité.

2) $$\frac{x}{\pi(1+x^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\pi x^2}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \begin{cases} \frac{1}{\pi x} > 0 \\ xf(x) > 0 \end{cases}$ $\quad \frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge.

Par théorème d'équivalence avec les intégrales à fonctions positives, $\int_1^{+\infty} x g(x)\,dx$ diverge donc X n'admet pas d'espérance.

X n'admet pas d'espérance donc pas de variance.

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$

$$\lim_{y \to -\infty} \left[\frac{\arctan(t)}{\pi} \right]_y^x$$

$$= \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

$g > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ par théorème fondamental de l'analyse.

Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{x \to -\infty} F(x) ; \lim_{x \to +\infty} F(x)\right[$

donc sur $]0;1[$.

$\forall y \in]0;1[,\ y = F(x) \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)\pi = \arctan(x)$

$\Leftrightarrow \tan\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = x.$

On pose $F^{-1} : y \mapsto \tan\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	Nombre de pages :	Session : 2025

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4)a)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x))$ car F réalise une bijection sur $\mathbb{R}$

$= F(x)$.

Donc par coïncidence des fonctions de répartition, $F^{-1}(U)$ suit même loi que X.

b) def cauchy() :

return(np.tan((rd.random() - 1/2)*np.pi)).

5) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $F_Z(x) = 0$ car $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_Z(x) = P(\sqrt{|X|} \leq x)$

$= P(|X| \leq x^2)$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $F_Z(x) = F_X(x^2) - F_X(-x^2)$ car X est à densité

$$= \frac{\arctan(x^2)}{\pi} - \frac{\arctan(-x^2)}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

Par somme F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) = \frac{\arctan(0) - \arctan(0)}{\pi}$$

$$= 0$$

$$= \lim_{x \to 0^-} F_Z(x) .$$

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et Z est une variable à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ F_Z'(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{1+x^4} + \frac{2x}{1+x^4}\right)/\pi & \text{si } x > 0 . \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Donc posons f_Z la densité de Z tel que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_Z(x) = \begin{cases} \frac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \geq 0 . \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

6) $x f_Z(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{4}{x^2}$ car $x^4+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} x f_Z(x) \geq 0 \\ \dfrac{4}{x^2} \geqslant 0 \end{cases}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente

donc $\int_1^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$ converge par critère d'équivalence.

$x \mapsto x f_Z(x)$ est continue sur $[0;1]$ donc $\int_0^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$

converge absolument et $E(Z)$ existe.

$x^2 f_Z(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{x}$. Par divergence de $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ et par

positivité des fonctions intégrées, le critère d'équivalence

donne la divergence de $\int_1^{+\infty} x^2 f_Z(x)\,dx$ donc $E(Z^2)$

n'existe pas. Ainsi $V(Z)$ non plus.

7)

b) $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $\dfrac{1}{x^2 \pm \sqrt{2}x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 \pm \sqrt{2}x+1} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \geqslant 0. \end{cases}$

Par critère d'équivalence comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2x+1}}$ convergent.

Par continuité de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - \sqrt{2x+1}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2 + \sqrt{2x+1}}$, les intégrales demandées convergent.

· $\forall x > 0$, $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1$

$$= \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 + 1\right).$$

~~Soit $t = \frac{x}{\sqrt{2}} + 1$~~

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}} + 1$ est une bijection croissante C^1 de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$.

Soit $t = \frac{x}{\sqrt{2}} + 1$. $x = (t-1)\sqrt{2}$. $dx = \sqrt{2}\, dt$.

Par convergence des intégrales en jeu, par changement de variable, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}(t^2+1)} \sqrt{2}\, dt$.

$$= \sqrt{2}\, 2 \times \lim \left[\arctan(y)\right]_1^{+\infty}$$

$=$

/

Copie anonyme - n°anonymat :

Code épreuve : 295	**Nombre de pages :**	**Session :** 2025
Épreuve de : MATHEMATIQUES		

Emplacement QR Code

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc, comme $\lim [\arctan(y)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{4}$,

on a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2x^2+\sqrt{2}x+1}dx = \frac{\sqrt{2}\,2}{4}\pi$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2}\,2}$.

8) On trouve que la valeur affichée dans la matrice M s'approche de 1 plus epsilon est petit et plus n est grand. On peut conjecturer que $Z \xrightarrow{P} \sqrt{2}$ par la loi faible des grands nombres. Toutefois pour appliquer ce théorème il faudrait que les (Z_n) suivant la même loi que Z aient une variance, or ce n'est pas le cas.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9) $1_A \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

$E(1_A) = P(A)$ et $V(1_A) = P(A)(1-P(A))$.

11) $Y_K = X_K + Z_K$.

14) $|x+y| > r \Rightarrow ([|x| > \frac{r}{2}]$ ou $[|y| > \frac{r}{2}])$

$\Leftrightarrow [|x| \leq \frac{r}{2}] \cap [|y| \leq \frac{r}{2}] \Rightarrow |x+y| \leq r$.

C'est vrai par inégalité triangulaire donc l'implication est vérifiée.

16) a)

~~$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(|\bar{Y}_n| > r) =$~~

$\forall n \in \mathbb{N}^*, [|\bar{Y}_n| > r] \subset [|\bar{X}_n| > \frac{r}{2}] \cup [|\bar{Z}_n| > \frac{r}{2}]$

car $\bar{Y}_n = \bar{X}_n + \bar{Z}_n$.

Par croissance de la probabilité,

$P(|\bar{Y}_n| > r) \leq P(|\bar{X}_n| > \frac{r}{2}) + P(|\bar{Z}_n| > \frac{r}{2})$ par

sous-additivité

30/