

Gabin

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01

09

Numéro de table

009

Exercice 1

Partie 1

1) Initialisation : Soit $m = 0$

d'un côté on a : $a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1$

de l'autre on a : 1

La proposition est initialisée en 0

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que pour m on a :

$$a_m + b_m = 1$$

on veut montrer que pour $m+1$ on a : $a_{m+1} + b_{m+1} = 1$

$$a_{m+1} + b_{m+1}$$

$$= \frac{7}{10} a_m + \frac{1}{10} b_m + \frac{3}{10} a_m + \frac{9}{10} b_m$$

$$= a_m + b_m$$

$$= 1 \rightarrow \text{par hypothèse de récurrence}$$

Conclusion : La proposition initialisée est héréditaire donc,

$$\underline{\underline{\forall m \in \mathbb{N}, a_m + b_m = 1}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n + b_n = 1$$

$$b_n = 1 - a_n$$

$$a_{n+1} = \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} b_n$$

$$= \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} (1 - a_n)$$

$$= \frac{7}{10} a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{10} a_n$$

$$= \frac{6}{10} a_n + \frac{1}{10}$$

$$\underline{a_{n+1} = \frac{3}{5} a_n + \frac{1}{10}}$$

b) $l = \frac{3}{5} l + \frac{1}{10}$

$$l - \frac{3}{5} l = \frac{1}{10}$$

$$\frac{2}{5} l = \frac{1}{10}$$

$$l = \frac{5}{20}$$

$$\underline{l = \frac{1}{4}}$$

$$c) \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - l$$

$$v_{n+1} = a_{n+1} - l$$

$$= \frac{3}{5} a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{5} a_n - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{3}{5} \left(a_n - \frac{1}{4} \right)$$

$$\underline{v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n}$$

Ainsi la suite v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$
 et de 1^{er} terme $v_0 = \frac{3}{4}$ $\underbrace{v_n}_{v_n \geq 0} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^n$

$$d) \quad v_n = a_n - l$$

$$a_n = v_n + l$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underline{a_n = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \frac{1}{4}}$$

$$3) a) \quad a_n + b_n = 1$$

$$b_n = 1 - a_n$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^n - \frac{1}{4}$$

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5} \right)^n}$$

$$\underline{= \frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right)}$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\frac{3}{5} \in]-1; 1[$ donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

~~Par multiplication des~~

Par produit des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

Par addition des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{4}$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{3}{4}$

4)

```

def rang(s):
    b = 0
    n = 0
    while b >= n:
        n = n + 1
        b = 3/4
    return n
    
```

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom(s)

Signature

Ecricome

Épreuve : MathématiquesSujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 09Numéro de table 009

Partie 2

5) a) QP

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+9+0 & -3+3+0 & 3+0-3 \\ -9+9+0 & +9+3+0 & -9+0+9 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\underline{QP = 12I_3}$$

b) Ainsi, $QP = 12I_3$

$$\frac{Q}{12}P = I_3$$

Donc P est inversible et la matrice inversible $P^{-1} = \underline{\underline{\frac{Q}{12}}}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$6) a) \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+3+0 \\ 3+27+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne de M avec pour valeur propre 10

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+1+0 \\ -3+9+0 \\ 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur ~~propre~~ colonne de M avec pour valeur propre 6

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0+3 \\ 3+0-3 \\ 0+0+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur p colonne de M avec pour valeur propre associée 10

$$b) \quad PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 + 0 + 0 & 0 - 6 + 0 & 0 + 0 + 10 \\ 30 + 0 + 0 & 0 + 6 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 30 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$PD P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 30 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 30 + 54 + 0 & 30 - 18 + 0 & -10 - 18 + 40 \\ 90 - 54 + 0 & 90 + 18 + 0 & -30 + 18 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 120 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 84 & 12 & 12 \\ 36 & 108 & -12 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\underline{PD P^{-1} = M,}$$

7) a) Initialisation: $m = 0$

d'un côté on a: $M^0 = I_3$

de l'autre $\frac{1}{12} P D^0 Q = \frac{1}{12} P Q = I_3$
 $\hookrightarrow (q.s.b)$

La proposition est initialisée en 0

Hérédité: Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que pour m on a
 $M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$, on veut montrer que pour $m+1$ on a

$$M^{m+1} = \frac{1}{12} P D^{m+1} Q$$

$$M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$$

$$M M^m = M \frac{1}{12} P D^m Q$$

$$M^{m+1} = P D P^{-1} \frac{1}{12} P D^m Q$$

$$M^{m+1} = \frac{1}{12} P D D^m Q$$

$$\underline{M^{m+1} = \frac{1}{12} P D^{m+1} Q}$$

Conclusion: Ainsi, la proposition initialisée est héréditaire
donc, $\forall m \in \mathbb{N}$, $M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

ecricome

Épreuve :

Mathématiques

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

0

3

/

☐

0

9

Numéro de table

☐

0

0

9

$$b) Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-1 \\ -9+0+3 \\ 0+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ Soit } m \in \mathbb{N}, M^m = \frac{1}{12} P D^m Q$$

$$M^m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} P D^m Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} P D^m \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale

$$\text{donc } D^m = \begin{pmatrix} 10^m & 0 & 0 \\ 0 & 6^m & 0 \\ 0 & 0 & 10^m \end{pmatrix}$$

$$D^m \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^m & 0 & 0 \\ 0 & 6^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 10^m + 0 + 0 \\ 0 - 6^m + 0 \\ 0 + 0 + 4 \times 10^m \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^n + 0 + 0 \\ -6 \times 6^n + 12 + 0 \\ 4 \times 10^n + 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$P D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \times 10^n \\ -6 \times 6^n \\ 4 \times 10^n \end{pmatrix}$$

$$P D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 10^n + 6^{n+1} + 4 \times 10^n \\ 6 \times 10^n - 6 \times 6^n + 0 \\ 0 + 0 + 12 \times 10^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12} P D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 \times 10^n + 6^{n+1} \\ 6(10^n - 6^n) \\ 12 \times 10^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12} P D^n \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6(16^n) \\ 6(4^n) \\ 12 \times 10^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 16^n \\ \frac{1}{2} \times 4^n \\ 10^n \end{pmatrix}$$

$$\underline{M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}}$$

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

~~$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10}x_n + \frac{1}{10}y_n + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}x_n + \frac{9}{10}y_n - \frac{1}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$~~

$$\frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7x_n + y_n + 1 \\ 3x_n + 9y_n - 1 \\ 0 + 0 + 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{10}x_n + \frac{1}{10}y_n + \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}x_n + \frac{9}{10}y_n - \frac{1}{10} \\ 0 + 0 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Initialisation : $n = 0$

d'un côté on a : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

de l'autre on a : $\frac{1}{10} M^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La proposition est initialisée en 0

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que pour n on a:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ on veut montrer que pour}$$

$$n+1 \text{ on a : } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

or (p.a) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ Par hypothèse de récurrence

$$= \frac{1}{10} M \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion: La proposition initialisée est héréditaire, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \underline{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (q.f.d.)$$

$$= \frac{1}{10^n} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

Écricome

Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 09

Numéro de table 009

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{1}{5^n \times 2^n} \times 2^n \times 2^{n-1} (5^n + 3^n)$$

$$= \frac{1}{2 \times 5^n} (5^n + 3^n)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^n}{5^n}$$

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Exercice 2:

Partie 1

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 1 - x e^{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x e^{1-x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1$$

Par produit des
~~limites~~ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^{1-x} = +\infty$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x e^{1-x}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

par croissance comparée,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{1-x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Ainsi par addition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

Donc il y a une asymptote horizontale pour $\mathcal{C}$ de valeur 1

2) a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = 1 - x e^{1-x} \quad \text{forme : } u + v \times w$$

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = 1 \\ v(x) = -x \\ w(x) = e^{1-x} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} u'(x) = 0 \\ v'(x) = -1 \\ w'(x) = -e^{1-x} \end{array} \right.$$

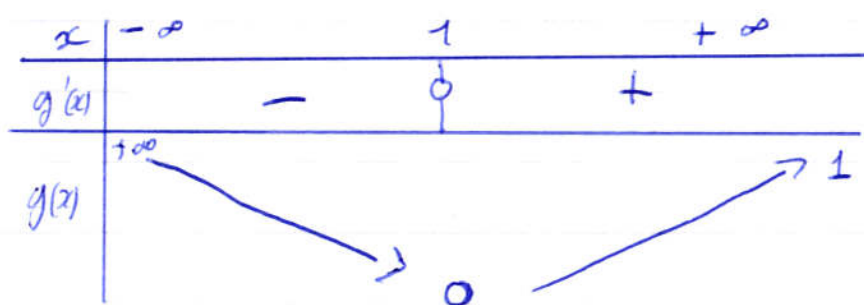
$$g'(x) = -e^{1-x} + x e^{1-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{1-x} (x-1)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, e^{1-x} > 0$
 $x-1 > 0$
 $x > 1$

$g'(x) \text{ est } > 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$

$g'(x) \text{ est } \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 1]$



$$\begin{aligned}
 g(1) &= 1 - 1e^{1-1} \\
 &= 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

3) a) $g'(x) = e^{1-x} (x-1)$ forme $u \times v$

$$\begin{array}{|l}
 U(x) = e^{1-x} \\
 V(x) = x-1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|l}
 U'(x) = -e^{1-x} \\
 V'(x) = 1
 \end{array}$$

$$g''(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} + e^{1-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = 2e^{1-x} - xe^{1-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = e^{1-x} (2-x)$$

b) $e^{1-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$2-x > 0$$

$$2 > x$$

• g est convexe sur $]-\infty; 2[$

• g est concave sur $]2; +\infty[$

4) a) ~~$y = f'(2)(x-2) + f(2)$~~

$$y = g'(2) \left(\frac{2-x}{2} \right) + g(2)$$

$$= e^{-1} (2-1) (x-2) + 1 - 2e^{1-2}$$

$$= xe^{-1} - 2e^{-1} + 1 - 2e^{-1}$$

$$= xe^{-1} - 4e^{-1} + 1$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

Écriricome

Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 09

Numéro de table 009

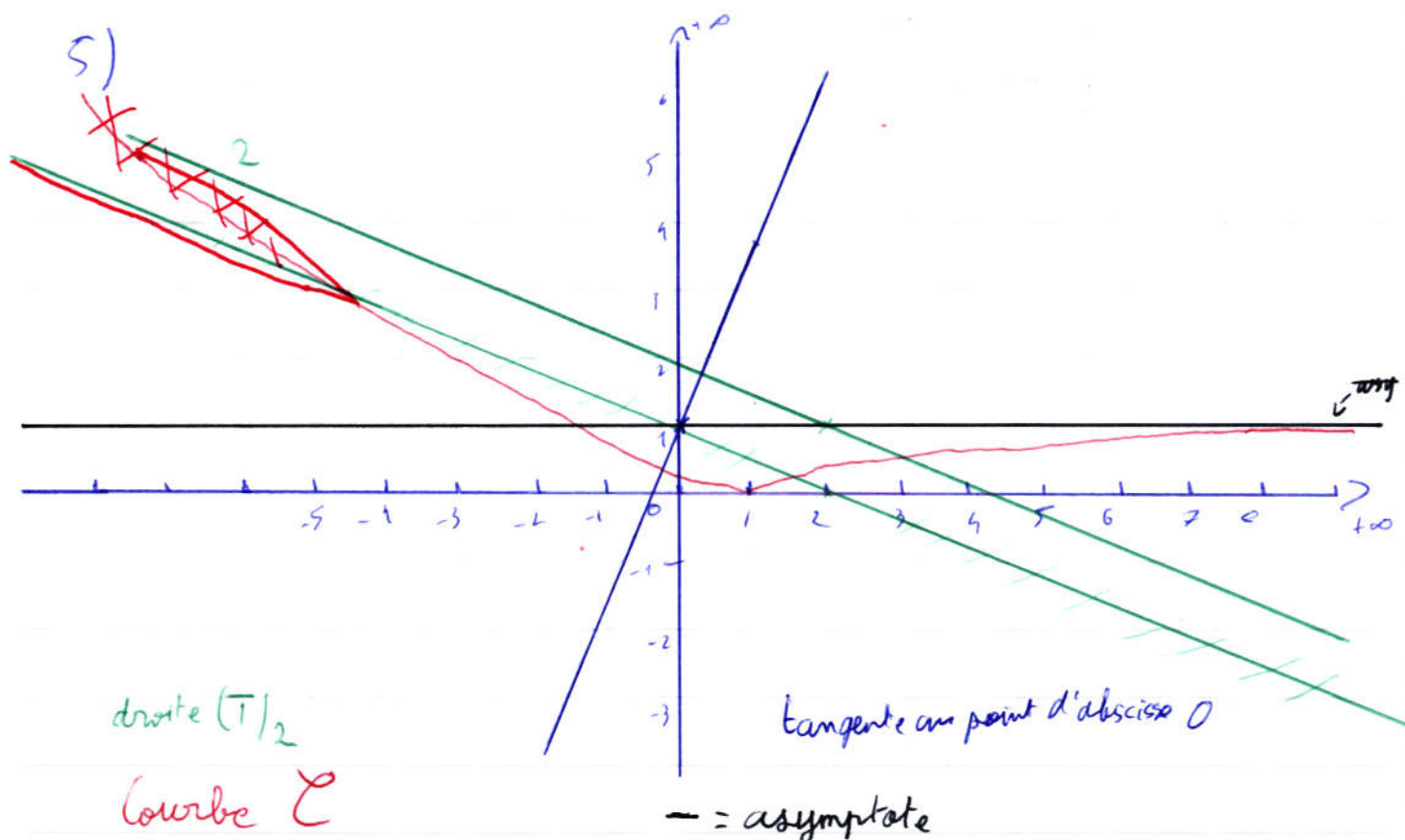
$$y = g'(2)(2-x) + f \rightarrow g(2)$$

$$= e^{-1}(2-x) + 1 - 2e^{-1}$$

$$= 2e^{-1} - xe^{-1} + 1 - 2e^{-1}$$

$$y = -2e^{-1} + 1$$

- b) (T) est au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ sur $]2; +\infty[$
 (T) est au dessous de la courbe $\mathcal{C}$ sur $]-\infty; 2]$



NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

un point d'abscisse 0

$$y = g'(0)(-x) + g(0)$$

$$= -e(-x) + 1$$

$$y = xe + 1$$

Partie 2

$$6) a) h(t) = \frac{1}{t^3}$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_e^A \rightarrow \text{soit } A > e \text{ primitive}$$

$$= -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{2e^2}$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2A^2} = 0$$

$$\text{donc, } \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2e^2}$$

b) ~~Soit~~ soit $x > e$

$$\int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{t^3} dt$$

$$\begin{cases} U'(x) = \frac{1}{t^3} \\ U''(x) = -\frac{1}{2t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} v^*(x) = \ln(t) - 1 \\ v'(x) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

U et V sont de Classe $([e; x])$, Ainsi par IPP

$$= \left[-\frac{\ln(t) + 1}{2t^2} \right]_e^x - \int_e^x -\frac{1}{2t^2} \times \frac{1}{t} dt$$

$$= -\frac{\ln(x) + 1}{2x^2} + \frac{\ln(e) + 1}{2e^2} + \frac{1}{2} \int_e^x \frac{1}{t^3} dt$$

$$= -\frac{\ln(x) + 1}{2x^2} + \frac{2}{2e^2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_e^x$$

$$= -\frac{\ln(x) + 1}{2x^2} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2e^2} \right)$$

$$= -\frac{\ln(x) + 1}{2x^2} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4e^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2} \left(-\ln(x) + 1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4e^2}$$

$$= \frac{1}{2x^2} \left(-\ln(x) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4e^2}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & \forall t < e \quad f(t) = 0 \geq 0 \\
 & \forall t < e \quad f(t) = 4e^2 \frac{\ln(t-1)}{t^3} \quad \text{or} \quad 4e^2 > 0 \\
 & \quad \quad \quad t^3 > 0 \\
 & \quad \quad \quad \ln(t-1) > 0 \\
 & \quad \quad \quad \ln(t) > 1 \\
 & \quad \quad \quad t > e
 \end{aligned}$$

(i) f est positive

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus]-\infty; e[$ en tant que fonction constante

f est continue sur $]e; +\infty[$ en tant que le produit de 2 fonctions polynômes et * d'une fonction logarithmique chacune continue sur $]e; +\infty[$

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt, \text{ soit } B < e, A > e$$

$$\text{Par la relation de Chasles, } \underbrace{\int_B^e f(t) dt + \int_e^A f(t) dt}_0$$

$$= \int_e^A 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt$$

$$= 4e^2 \int_e^A \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt$$

$$= 4e^2 \left(\frac{1}{2A^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(A) \right) + \frac{1}{4e^2} \right)$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 019

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2A^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(A) \right) = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

*

$$= 4e^2 \times \frac{1}{4e^2}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Ainsi f est une densité de probabilité

$$7) a) \quad F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$\text{soit } x < e : \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0$$

soit $x < e$

$$\text{soit } x > e : \int_{-\infty}^x f(t) dt = \text{par la relation de}$$

$$\text{Choles : } \underbrace{\int_e^x f(t) dt}_0 + \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_e^x 4e^t \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt$$

$$= 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(t)-1}{t^3} dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$= \frac{1}{4e^2} \left[\left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + 1$$

$$\underline{F_X(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < e \\ \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(t) \right) + 1 & \text{si } t > e \end{cases}$$

$$b) \quad P(X \leq e^2) = \int_{-\infty}^{e^2} f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{2e^4} \left(\frac{1}{2} - \ln(e^2) \right) + 1$$

$$= \frac{1}{2e^4} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + 1$$

$$= \frac{1}{2e^4} \left(-\frac{3}{2} \right) + 1$$

$$\underline{P(X \leq e^2)} = \frac{1}{2e^4} \left(-\frac{3}{2} \right) + 1 = -\frac{3}{4e^4} + 1$$

$$P(e^2 < X \leq e^3) = F_X(e^3) - F_X(e^2)$$

$$= \frac{1}{2e^6} \left(\frac{1}{2} - \ln(e^3) \right) + 1 - \left(-\frac{3}{4e^4} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2e^6} - \frac{3}{4e^4} + \frac{3}{4e^4} = \frac{1}{2e^6}$$

$$= \frac{1}{e^4} - \frac{6}{e^4} + \frac{3}{e^2}$$

$$= -\frac{5}{e^4} + \frac{3}{e^2}$$

$$P(e^2 < X < e^3) = \frac{1}{e^2} \left(-\frac{5}{e^2} + 3 \right)$$

$$P_{(X \geq e^2)} (X < e^3) = \frac{P([X \geq e^2] \cap [X < e^3])}{P(X \geq e^2)}$$

$$= \frac{P(e^2 \leq X < e^3)}{1 - P(X \leq e^2)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{e^2}} \left(-\frac{5}{e^4} + \frac{3}{e^2} \right)}{1 + \frac{3}{e^2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{e^2} \left(-\frac{5}{e^2} + 3 \right)}{\frac{3}{e^2}}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{e^2}} \left(-\frac{5}{\cancel{e^2}} + 3 \right)}{\cancel{\frac{3}{e^2}}}$$

$$= \frac{(-5/e^2 + 3)}{e^2} \times \frac{e^2}{3}$$

$$= \left(-\frac{5}{e^2} + 3 \right) \times \frac{1}{3}$$

$$\cancel{P_{X \geq}} \underline{P_{(X \geq e^2)} (X < e^3)} = \underline{-\frac{5}{3e^2} + 1}$$

8) a) $G(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$ forme $\frac{u}{v}$

$$\cancel{G'(x) =} \left| \begin{array}{l} u(x) = -\ln(x) \\ v(x) = x \end{array} \right| \begin{array}{l} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v'(x) = \cancel{x} 1 \end{array}$$

$\forall x > e, G'(x) = \frac{-1 + \ln(x)}{x^2}$

b) Pour montrer que G admet une espérance il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} x G(x) dx$ converge

soit $A > e$ et $B < e$, Par la relation de Chasles

$$\underbrace{\int_B^e x G(x) dx}_0 + \int_e^A x G(x) dx$$

$$= \int_e^A -\ln(x) dx$$

~~*~~ -

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille ☐ 0 ☒ 2 / ☐ 0 ☐ 9

Numéro de table ☐ 0 ☐ 0 ☐ 9

9) a) Soit $t \geq e^2$

b)

10) a) $Z_m = (\max(X_1, X_2, \dots, X_m))$

$$F_{Z_m}(x) = P(Z_m \leq x)$$

$$= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_m) \leq x)$$

par l'indépendance et comme les X suivent la même loi

$$= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x) \cap \dots \cap (X_m \leq x))$$

$$= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \times \dots \times P(X_m \leq x)$$

$$= P(X \leq x)^m$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\underline{F_{Z_m}(x) = (F(x))^m}$$

$$b) \quad P\left(\frac{1}{\sqrt{e}} Z_m \leq e^{x/2}\right) \quad) \text{ par la croissance de la fonction exponentielle}$$

$$= P(Z_m \leq e^{1/2} \times e^{x/2})$$

$$= P(Z_m \leq e^{\frac{x+1}{2}})$$

$$= \left(\hat{F}\left(e^{\frac{x+1}{2}}\right)\right)^m$$

$$= \underline{(1 - x e^{1-x})^m}$$

c)

Partie 3

11) a) Soit $m \in \mathbb{N}$,

$$h_m(1) = (1 - e^0)^m$$

$$\underline{h_m(1) = 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_m(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \quad (\text{q. 1. b)})$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, 1^m = 1$$

$$\text{ainsi, } \underline{\lim_{x \rightarrow +\infty} h_m(x) = 1}$$

$$b) \quad h_m(x) = (1 - xe^{1-x})^m$$

$$h'_m(x) = (g'(x))^m$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, h'_m(x) = (e^{1-x}(x-1))^m$$

$$e^{1-x}(x-1) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$
$$m \geq 0$$

Ainsi $h'_m(x) \geq 0$ donc $h_m(x)$ est croissante

sur $[1; +\infty[$

- c) h_n est strictement croissante sur $[1; +\infty[$
 h_n est continue sur cet intervalle

$$\begin{aligned} \cancel{g(1)} &= 0 - h_n(1) = 0 \\ - \lim_{x \rightarrow +\infty} \cancel{h_n(x)} &= 1. \end{aligned}$$

ainsi $\frac{1}{2} \in [0; 1[$,

Par le théorème de bijection, il existe un unique réel α_n de $[1; +\infty[$ tel que $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{2}$

- 12) Avec le graphique on voit que (α_n) est monotone
~~de~~ sur $[1; +\infty[$.

- 13) a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

b

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 09

Numéro de table 009

Exercice 3

Partie 1

1) a) - On reconnaît un schéma de Bernoulli de succès, on tire un boulet avec une probabilité de succès de paramètre $p = \frac{3}{10}$

- R compte le nombre de succès lors des n tirages
- les tirages sont indépendants et identiques
- de même loi

Ainsi R suit une loi Binomiale

$$R \sim B\left(n, \frac{3}{10}\right)$$

$$R \in \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(R=k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} b) \quad E(R) &= np \\ E(R) &= \frac{3n}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(R) &= np(1-p) \\ &= \frac{3n}{10} \left(\frac{7}{10}\right) \\ V(R) &= \frac{21n}{100} \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$2) S = R + C$$

$$a) P(S=0) = P((R=0) \cup (C=0))$$

$$= P(M=m)$$

$$= \cancel{\binom{m}{k}} \left(\frac{1}{5}\right)^m$$

$$P(S=1) = P(R=1 \cup C=0) + P(R=0 \cup C=1)$$

=

b) On reconnaît un schéma de bernoulli de succès on tire un foulard avec des roses ou des carreaux de paramètre $p = \frac{8}{10}$

- S compte le nombre de succès lors des n tirages
- Les tirages sont indépendants
- Identiques

Ainsi S suit une loi binomiale

$$S \sim B\left(n; \frac{8}{10}\right)$$

$$\begin{aligned} c) \quad E(S) &= n \times p \\ &= \frac{8}{10} n \end{aligned}$$

$$\underline{E(S) = \frac{4}{5} n}$$

$$V(S) = np(1-p)$$

$$= \frac{4}{5} n \left(\frac{2}{10}\right)$$

$$= \frac{4}{5} n \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\underline{V(S) = \frac{4}{25} n}$$

3) a) $\text{Cov}(R, C)$

Par la formule de Kœnig-Huygens

$$= E(RC) - E(R)E(C)$$

$$E(RC) = 0$$

$$\text{Cov}(R, C) = -\frac{3n^2}{20}$$

b) $\text{Cov}(R, C) < 0$, les variables R et C

sont non indépendantes

$$c) \quad \rho(R, C) = \frac{\text{Cov}(R, C)}{\sigma(R) \times \sigma(C)} = \frac{\text{Cov}(R, C)}{\sqrt{\frac{21}{100} n} \times \sqrt{\frac{1}{5} n}}$$

$$\rho(R, C) = \frac{\text{Cov}(R, C)}{\frac{\sqrt{21}}{10} n}$$

$$= \frac{-\frac{3m^2}{20}}{\frac{\sqrt{21}m}{10}}$$

$$= -\frac{3m^2}{20} \times \frac{10}{\sqrt{21}m}$$

$$p(R,C) = -\frac{3m}{2\sqrt{21}m} \times$$

Partie 2 :

5) a) - On reconnaît un schéma de Bernoulli de succès on tire un foulard avec des carreaux ou des instruments de musique de proba ~~p~~ paramètre $p = \frac{7}{10}$

- T compte le temps d'attente avant l'apparition du 1^{er} succès
- Les tirages sont indépendants
- identiques

T suit une loi géométrique, $T \sim G\left(\frac{7}{10}\right)$

$$b) E(T) = \frac{1}{p}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{10}}$$

$$\underline{E(T) = \frac{10}{7}}$$

$$V(T) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{49}{100}}$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{100}{49}$$

$$\underline{V(T) = \frac{30}{49}}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve : mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 09

Numéro de table 009

6) a) $N(2) = [1, k]$

b) ~~$[N=2]$ est la matrice~~

$[N=2] = \bar{R}_1 \cap R_2$ ~~$\cup R_3$~~

c) $P(N=2) = P(\bar{R}_1 \cap R_2) \cup$

$= P(\bar{R}_1) \times P_{\bar{R}_1}(R_2)$

$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{10}$

$P(N=2) = \frac{21}{100}$

d) $[N=3] = \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3$

$P(N=3) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap R_3)$

$= P(\bar{R}_1) \times P_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2) \times P_{\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2}(R_3)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned} e) \sum_{k=2}^{+\infty} P(N=k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{7}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{10} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{7}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{10} \in]1; +\infty[\\ \frac{7}{10} \in]-1; 1[\end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$$

$$= \frac{7}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{k+1} + \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{3}{10}$$

$$\underline{\sum_{k=2}^{+\infty} P(N=k) = 1}$$

7) a)

Partie 3

10) SELECT ref, tissu, motif, quantité
FROM foulards

~~40)~~

11) L'attribut qu'on peut choisir comme
clé primaire est la colonne ref

12) SELECT * ref, prix
FROM foulards
UPDATE prix ~~= 72€~~
~~WHERE ref = '26ECR'~~
SET 72€
WHERE ref = '26ECR';

13) La requête sélectionne toutes les colonnes de
la table foulards où la quantité est supérieure
ou égale à 20 et que le délai de livraison
est inférieur à 35.