

Félix

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille



0



1



0



6

Numéro de table



0



1



1

Exercice 1:

1) La particule choisie une compagnie parmi les n disponibles avec équiprobabilité, on reconnaît deux que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U} [1, m]$$

$$\forall k \in X(m), P(X=k) = \frac{1}{m}$$

$$E(X) = \frac{m+1}{2} ; V(X) = \frac{m^2-1}{12}$$

2) Si $k > j$:

$$P([X=j] \cap [Y=k]) = 0$$

car la particule choisie une compagnie au moins aussi bien classée.

Si $k \leq j$:

$$P([X=j] \cap [Y=k]) = P(X=j) \cdot P(Y=k | X=j)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$P((X=j) \cap (Y=k)) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n_j} \quad (X=j)$$

$$Q_1, \quad P(Y=k) \subset U[1, j]$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty}, \quad \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n_j} = \frac{1}{m_j}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j 1 \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cdot j \\ &= n = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \end{aligned}$$

4) Nous avons vu que: $(Y=k) \subset \cup_{j=1}^m (X=j)$

$[X=j]_{j \in \{1, \dots, m\}}$ formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne donc que:

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \{1, \dots, m\}, \quad IP(Y=k) &= \sum_{j=1}^m P(X=j) \cdot P(Y=k | X=j) = \sum_{j \geq k} \frac{1}{m_j} + \sum_{j=1}^{k-1} 0 \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{m} \cdot IP(Y=k | X=j) \\
 &= \frac{1}{m} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \geq k}}^m IP(Y=k | X=j) + \sum_{\substack{j=1 \\ k > j}}^m IP(Y=k | X=j) \right) \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^m \frac{1}{m_j} \\
 &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^m \frac{1}{j} \\
 &= \frac{1}{m} = IP(Y=k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) a) \quad \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^m \frac{k}{j} &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq m} \frac{k}{j} \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k \\
 &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} \cdot \frac{j(j+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j+1)
 \end{aligned}$$

5) b) Y est une variable aléatoire finie, donc admet une espérance.

De plus,

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n k P(Y=k) \quad (k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$$

$$= \sum_{k=1}^n k \cdot \sum_{j=1}^n \cancel{\frac{1}{m}} \cdot P(Y=k) \quad (X=j)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{j=k}^n \cancel{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1}{m_j} \right) \quad \left(\text{car } P(Y=k) = 0 \quad \forall j < k \right)$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j}$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^n (j+1)$$

(d'après 5) a)

$$= \frac{1}{2m} \sum_{j=2}^{n+1} j$$

$$= \frac{1}{2m} \cdot \frac{n(n+3)}{2}$$

$$= \frac{n+3}{4} = E(Y)$$

6) a) X et Y sont deux variables aléatoires finies admettant une espérance, on a donc :

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n k_j P((X=j) \cap (Y=k))$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n k_j \cdot \frac{1}{m_j}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n k$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Signature

Nom

Prénom (s)

F É L I X

Ecricome

Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 06

Numéro de table

011

$$\begin{aligned} \text{Donc, } E(XY) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) b) E(X, Y) &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=2}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+4)}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} = E(XY) \end{aligned}$$

$$6) c) \text{ On sait que : } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } \text{Cov}(X, Y) &= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{4} \\ &= \frac{(n+1)(2n+4)}{12} - \frac{(n+1)(n+3)}{8} \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \frac{2(m+1)(2m+4) - 3(m+1)(m+3)}{24} \\&= \frac{(m+1)(4m+8 - 3m - 9)}{24} \\&= \frac{(m+1)(m-1)}{24} \\&= \frac{m^2-1}{24} = \left[\frac{1}{2} V(X) \right]\end{aligned}$$

7) a) L'indépendance implique une covariance nulle, ce qui n'est pas ~~toujours~~ le cas d'après 6) c) ($m \geq 2$).

X et Y ne sont donc pas indépendantes.

8) a) def simble XY(m):

X = red. rendement (1, m)

Y = red. rendement (1, m)

if Y > X:

return 0

else:

return X, Y

8) b) Non fait.

8 c) Le tracé 1 n'est pas une droite, le 4 ne correspond pas aux valeurs obtenues, et le tracé 3 ~~prend des valeurs positives~~ ne passe pas par le point moyen de la série statistique. Le tracé 2 correspond.

9) a) ~~$A_n = [X=j] \cap [Y=j]$~~

$$A_n = \bigcup_{j=1}^n [X=j] \cap [Y=j]$$

9) b) Par disjonction deux à deux, on a :

$$P(A_n) = \sum_{j=1}^n P([X=j] \cap [Y=j])$$

$$\text{Or, } \forall j \in [1, n], P([X=j] \cap [Y=j]) = \frac{1}{n_j} \quad (\text{on a bien } k \leq j)$$

$$\text{Donc, } P(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

9) c) $f: j \mapsto h_n(j)$ est une fonction positive et dérivable sur $\mathbb{N}$.

L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad |h_n(j+1) - h_n(j)| \leq f'(j) |j+1 - j|$$

$$\Leftrightarrow h_n(j+1) - h_n(j) \leq \frac{1}{j}$$

Non terminé, admettons,

9)d) L'inégalité précédente nous donne que:

$$\frac{1}{n(j+1)} \leq \frac{1}{n} (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \frac{1}{n_j}$$

Le passage à la somme donne:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

D'après l'inégalité en 9.c., $\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j} \leq \ln(j) - \ln(j-1)$

$$\text{d'où, } \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{n} IP(A_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \ln(j) - \ln(j-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} (\ln(n+1) - 1) \leq IP(A_n) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \ln(n) \quad (\text{Par télescope})$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq IP(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{n} \leq IP(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$$

9)e) L'inégalité précédente nous donne que:

$$\frac{n}{\ln(n)} \frac{\ln(n+1)}{n} \leq \frac{n IP(A_n)}{\ln(n)} \leq \frac{n \cdot \ln(n)}{n \ln(n)} + \frac{n \ln(n)}{n \ln(n)}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq n \frac{IP(A_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

Écriricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

06

Numéro de table

011

Ainsi, le théorème d'encodement assure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln P(A_n)}{\ln(n)} = 1$

Donc que, $P(A_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$

10) a) `SELECT COUNT(*) FROM achatet WHERE id-2025 = id-2026`

10) b) la commande lie les deux table sur la foreign key, id-2026 et id afin de renvoyer le numéro de l'assuré ainsi que la compagnie qu'il aurait choisie.

10) c) `SELECT compagnie, AVG(mote) FROM avis`

10) d) `SELECT compagnie FROM avis ORDER BY note note ASC DESC`

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Exercice 2:

Partie I -

$(x \mapsto \frac{1}{1-x})$ est définie si et seulement si $x \neq 1$

$(x \mapsto \ln(x))$ est définie si $x > 0$

$$\text{Or, } \frac{1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > x$$

Ainsi, f est définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[= \text{Df.}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \quad \text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty, \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = +\infty$$

3) f est dérivable comme composée et quotient de fonctions qui le sont sur Df.

Soit $x \in \text{Df.}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{(1-x)}} = \frac{1}{(1-x)}$$

$$\frac{1}{1-x} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x < 1$$

On a donc le tableau suivant:

x	$-\infty$	1
f'		ϕ
f		$+\infty$

$$4)a) \quad f(x) = \ln(1) - \ln(1-x) \\ = -\ln(1-x)$$

$$\text{Ainsi, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \left(-x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \right) \\ = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

4)b)

L'équation de la tangente de f en 0 est donnée par :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Leftrightarrow y = f'(0)x + f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$\text{Donc, } y = x f'(0)$$

$$Q_1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x}$$

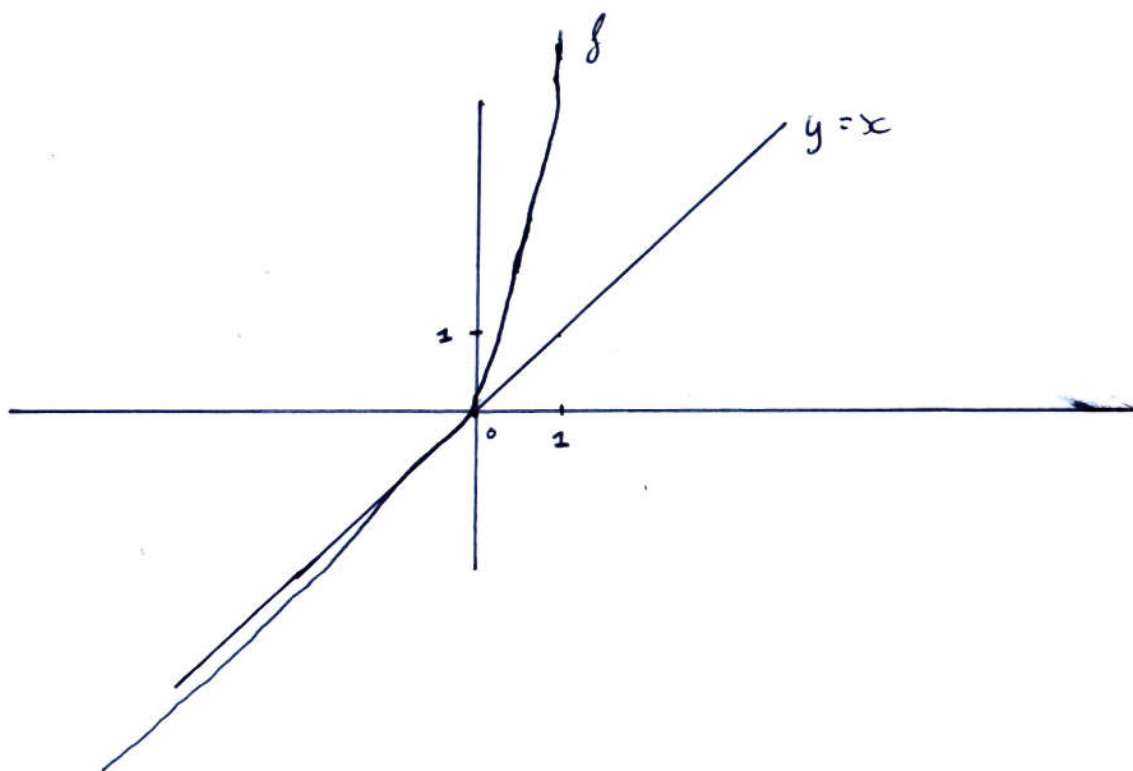
$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = 1$$

Ainsi, l'équation de la tangente est: $y = x$

~~La concavité de la fonction logarithme assure que la position de f est en dessous de ses tangentes, notamment en 0.~~

5)



$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ sur I , f est convexe, donc au dessus de sa tangente.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

ECRICOME

Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille /

Numéro de table

Exercice 2: Partie 2 -

6) a) Il s'agit de la série harmonique divergente.

$$6) b) S_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

$(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

$$6) c) \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

$$7) \forall x \in]-1, 1[, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{x^k}{k} \right| \leq |x^k|$$

Ainsi, par croissance des puissances à la somme (termes positifs):

$$\sum_{k \geq 1} \left| \frac{x^k}{k} \right| \leq \sum_{k \geq 1} x^k$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On reconnaît une série géométrique convergente car $x \in]-1, 1[$
Ainsi, $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} b \left| \frac{x^k}{a} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x^k|$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure donc la convergence absolue de la série, $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{a} \right|$

$$g) a) S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \quad ; \quad S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$

$(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

$$S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3}$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$$

$(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}}$ est

croissante sur $\mathbb{N}^*$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (sans réserve de convergence)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(-1)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1}(-1))$

Ce qui suffit à prouver qu'elles sont bien adjacentes.

8) b) $S_n(-1) = S_{2n}(-1) + S_{2n+1}(-1)$

$S_n(-1)$ est donc la somme de deux suites adjacentes convergentes, ce qui assure sa convergence.

En notant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(-1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}(-1) = \ell$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(-1) = 2\ell$.

8) c) Non fait.

9) a) $\forall x > 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} \leq \frac{x^k}{k}$

$$(\Rightarrow) \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$$

Ainsi, par comparaison, on trouve que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ diverge

9) b) on a donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$

Parte III -

10) a) Si $a < 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{1-t} dt &= - \int_a^0 \frac{1}{1-t} dt = - \left[-\ln(1-t) \right]_a^0 \\ &= 0 - \ln(1-a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)\end{aligned}$$

Si $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^a = -\ln(1-a) = \ln\left(\frac{1}{1-a}\right)$$

Si $a < 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt &= - \int_a^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= - \left[\frac{1}{1-t} \right]_a^0 \\ &= -1 + \frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

Si $a > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt &= \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{1-a} - 1\end{aligned}$$

~~10) b)~~

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0

5

/

0

6

Numéro de table

0

1

1

Partie III -

$$10) b) f(a) = \ln \left(\frac{1}{1-a} \right)$$

$$a + R_1(a) = a + \int_0^a \frac{(a-t)}{(1-t)^2} dt$$

$$= a + \int_0^a \frac{(a-1) + (1-t)}{(1-t)^2} dt$$

$$= a + \int_0^a \frac{(a-1)}{1-t^2} dt + \int_0^a \frac{1}{(1-t)} dt$$

$$= a + (a-1) \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) + f(a)$$

(d'après 10) a))

=

Non terminé.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

11) Prenons les fonctions :

~~$$u(x) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$~~

~~$$u(x) = \frac{1}{m(1-t)^{m+1}}$$~~

$$v(x) = (a-t)^n$$

$$v(x) = \frac{-(a-t)^{n+1}}{n+1}$$

$$u'(x) = (n+1)(1-t)^{-(n+2)}$$

$$u(x) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$$

Le théorème d'intégration par partie donne :

$$R_n(a) = \left[\frac{-(a-t)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1} (n+1)}{(n+1) (1-t)^{n+2}}$$

$$= 0 + \frac{a^{n+1}}{n+1} \cdot 1 + R_{n+1}(a)$$

$$= \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$$

12) On en déduit que :

$$R_n(a) = \frac{a^n}{n} + R_n(a)$$

$$R_{n-2}(a) = \frac{a^{n-1}}{n-1} + \frac{a^n}{n} + R_n(a)$$

On a ainsi, par récurrence immédiate :

$$R_1(a) = \sum_{k=2}^n \frac{a^k}{k} + R_1(a)$$

$$\text{Or, } f(a) = a + R_1(a)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } f(a) &= a + \sum_{k=2}^n \frac{a^k}{k} + R_n(a) \\ &= \underline{S_n(a) + R_n(a)} \end{aligned}$$

$$13) \forall t \in [0, a] \quad 0 \leq t \leq a$$

$$(\Leftrightarrow) 1 \geq 1-t \geq 1-a$$

$$(\Leftrightarrow) 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a}$$

$$(\Leftrightarrow) \underline{a-t} \leq \frac{a-t}{1-t} \leq \frac{a-t}{1-a}$$

$$(\Leftrightarrow) 0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq \frac{a-t}{1-a} \leq a$$

$$\text{Donc, } \underline{0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a} \quad \forall t \in [0, a]$$

13) b) L'inégalité précédente donne, par croissance de la fonction puissance m -ième sur $\mathbb{R}_+$.

$$0 \leq \frac{(a-t)^{\overbrace{m+1}^{m+1}}}{(1-t)^{n+1}} (a-t)^{-1} \leq \frac{a^{m+1}}{a-t}$$

la croissance de l'intégrale donne:

$$0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^{m+1}}{a-t} dt$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq R_n(a) \leq a^{m+1} \int_0^a \frac{1}{a-t} dt \leq a^{m+1} \int_0^a \frac{1}{1-t} dt$$

Non terminé.

13) c) On sait que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(a) + R_n(a)$

Or, d'après l'inégalité précédente et par théorème d'encadrement:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(a) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1}}{1-a} = 0 \quad (a \in]-1, 1[)$$

Ainsi, $f(a) = S(a)$ | Puisque $S(a)$ converge d'après 8, b).

14) a) Non fait.

14) b) def ~~sum~~ ^{sum} (~~m~~ ^m):

$s = 0$

for i in range(m):

$s = s + 1/i(2**i)$

return s

def val(eps):

while $*(mp.sqrt(2) - \text{sum}(m)) > \text{eps}$:

$* mp.abs$

$m = m + 1$

return sum(m)

14) c) Le tracé orange correspond à la suite $(S_n(\frac{1}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$.

Le tracé décroissant correspond à $(-S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}}$.

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature

ecricome

Épreuve : *Mathématiques appliquées*

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0	6
---	---

 /

0	6
---	---

Numéro de table

0	1	1
---	---	---

Exercice 3:

$$1) s'(t) = x'(t) + y'(t) = x(t) + y(t) - x(t) - y(t) = 0$$

2) Non fait.

Partie II -

$$\det(P) = 1 - 0 = 1$$

P est donc inversible, d'inverse:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0 est ainsi valeur propre de A.

De plus, on remarque que : $A^2 = 0_{2 \times 2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

On a donc le polynôme annulateur: $X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 0$

Donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et $0 \in \text{Sp}(A)$

Ainsi, $\bullet$ $\text{Sp}(A) = \{0\}$

6) A n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, on aurait donc:

Brennables et D diagonale telles que: $D = B^{-1}AB$ avec $D = O_{2 \times 2}$

$D_{2 \times 2} = B^{-1}AB \Leftrightarrow A = O_{2 \times 2}$ ce qui est absurde.

7) ~~$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$~~

$$P^{-1}J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PJ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Donc, $PJP^{-1} = A \Leftrightarrow$ $J = P^{-1}AP$

8) Non fait.

9) $X'(t) = AX(t)$

$$\Leftrightarrow X'(t) = PJ P^{-1} X(t)$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = JY(t)$$

$$\Leftrightarrow$$
 $Y'(t) = JY(t)$ car $Y'(t) = (P^{-1}X(t))' = P^{-1}X'(t)$

$$10) \quad Y'(t) = J Y(t)$$

On obtient le nouveau système :

$$(S) \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est donné par :

$$u: t \mapsto C_1 e^t \quad \text{et} \quad v: t \mapsto C_2 \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}.$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Partie III -

13) L'unique valeur propre de N est 0, car elle est non inversible. Si elle l'était.

$$N^h = 0 \Leftrightarrow N^h N^{-1} = 0 \Leftrightarrow N^{h-1} = 0$$

Ce qui est absurde puisque h est le premier entier tel que $N^h = 0$.

$$\text{Donc } \mathcal{O} \subset \text{Sp}(N)$$

On a également le polynôme annulateur : $X^h = 0 \Leftrightarrow X = 0$

$$\text{Sp}(N) \subset \{0\}$$

$$\text{Ainsi, } \underline{\text{Sp}(N) = \{0\}}$$

14). Par un raisonnement similaire à (6), N n'est diagonalisable que si il s'agit de la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas.

On avait:

$$P^{-1}NP = 0 \Leftrightarrow P^{-1}NP = 0_{n \times n}$$

$$\Leftrightarrow N = 0_{n \times n}.$$