

Jassem

Note de délibération : 19.47 / 20

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom(s)

Signature



Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

1 / 6

Numéro de table

16

Exercice 1 :

a) $f: t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$

et $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} = -1$ car par taux d'accroissement.

$$\frac{e^{-t} - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$$

Donc $\int_0^1 f(t) dt$ existe. Donc f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = -1$.

et donc f étant continue sur $[0, 1]$, $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

b) $g: t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $1/t$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

et en $+\infty$, $g(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ car $te^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Or d'après Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc
($2 = 2 > 1$)

Par critère de comparaison d'intégrale positive (car g est positive), $\left[\int_1^{+\infty} g(t) dt \text{ converge} \right]$

2a) Soit $a > 0$

$\pi_a : t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$

$$\text{et en } 0, \quad \pi_a(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \left((1 - t + \frac{t^2}{2}) - (1 - at + \frac{(at)^2}{2}) \right) + o\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{1}{t} (1 - t - 1 + at + o(1))$$

$$= a - 1 + o(1).$$

Donc $\pi_a(t) \underset{0}{\sim} a - 1$.

Donc ~~en~~ π_a est prolongeable par continuité en posant $\pi_a(0) = a - 1$.

Donc $\left[\int_0^1 \pi_a(t) dt \text{ existe.} \right]$

et en $+\infty$,

$$\eta_a(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ car } te^{-t} - te^{-at} = te^{-t} - e^{\ln(A-at)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge par Riemann.

Par croissance comparée.

Donc par ~~la~~ comparaison d'intégrale
positive,

$$\int_1^{+\infty} \eta_a(t) dt \text{ converge}$$

et donc par Charles, $\left[\int_0^{+\infty} \eta_a(t) dt \text{ converge} \right]$

2) Si $a \leq 0$,

$$\frac{1}{t} = o\left(\frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}\right)$$

$$\text{car } e^{-t} - e^{-at}$$

3a) Soit $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_0^x \frac{1 - e^{-at}}{t} dt - \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{Par linéarité}$$

3)

$$2) f: t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \quad \forall t \geq x \quad \text{Remarquons } 0 \leq \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{ax} dt \quad \text{Par}$$

décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et positivité

$$\text{or } \frac{1}{x} \int_x^{ax} e^{-t} dt = \frac{-e^{-ax} + e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ Par quotient}$$

$$\text{Donc Par encadrement, } \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc Par passage à la limite,

$$\boxed{b(a) = \ln(a)}$$

Pour $u = e^{-t}$, u est une bijection décroissante $e^{\mathbb{R}}(u)$
 $du = -e^{-t} dt$ Donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du &= \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}-1}{-t} (-e^{-t} dt) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} e^{-t} dt. \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt. \end{aligned}$$

$$\boxed{= b(2) = \ln(2).}$$

5a)

En reconnaissant une somme de Riemann,
 puisque e est continue sur $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e\left(\frac{k}{n}\right) = \boxed{\int_0^1 e(x) dx.}$$

b) ~~the~~

$$e(0) = 0.$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom(s)

Signature

ecricome

Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☒ 2 / ☒ 6

Numéro de table

☒ 16 ☐

def rect(m):

 $s=0$

for h in range(1,m):

$$S = S + ((h/m) - 1) / m \cdot \log(\frac{h}{m})$$

return((1/m)*S)

c)

Le Programme applique e à une liste de nombre
 dans $[0,1]$, puis renvoi leur somme divisé par m ,
 Donc, il renvoi la moyenne de e

d) la méthode de la 56 est meilleure car plus précise
 dès le départ.

Exercices:

1a) Il ya une colonne vide Donc 0 est valeur
 propre, (i.e. $\ker A \neq \{0\}$).

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \text{ Pareillement Donc } 5 \text{ est valeur propre.}$$

$$A - 12I = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Remarquons que } C_1 = 6C_3$$

Donc 12 est valeur propre.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Donc $\boxed{Sp(A) = \{0, 5, 12\}}$

b) $A \in M_3(\mathbb{R})$ et admet 3 valeurs propres,
Donc A est diagonalisable donc semblable
et $\tilde{a} D = \text{diag}(0, 5, 12)$.

c) De plus on sait que, en notant f l'application
de $\mathbb{R}^3$ associée à A , que $f(e_1) = 0$.

Donc $e_1 \in \text{Ker } f$.
et $f(e_2) \in \text{Ker}(f - 5\text{id})$

et $f(e_2) - 5e_2 \in \text{Ker}(f - 12\text{id})$
car $C_1 = 6C_3$.

Donc avec $D = \boxed{\text{diag}(0, 5, 12)}$

on a

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}}$$

Soit $n \geq 2$,

2a) soit

$$P_0 = P_1 = 0 \quad \text{car } \forall n \geq 1 \quad e^{(P)}(n) = 0.$$

$$P_1 = P(x) = (x^2 - 1) \times 0 + 5x \times 1 \\ = 5x$$

soit $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.

$$e(P_2) = e(x^2) = (x^2-1)x^2 + 10x^2 \quad \text{et} \quad e(P_h) = (x^2-1)h(h-1)x^{h-2} + 5hx^{h-1}$$

$$= 12x^2 - 2.$$

$$= (h^2 + 4h)x^2 - h(h-1)x^{h-2}.$$

1) ~~Soit~~ Soit P unitaire de degré d

Soit $P(x) = \sum_{H=0}^d H x^H$: $\deg(e(P)) = d$ et coefficient dominant (C.D.) $= d^2 + 4d$.

Initialisation: Pour $d = 0$,

$$e(P) = 0$$

Donc $\deg(e(P)) = 0 = d$ et C.D. = 0.

Donc $H(0)$ est vraie

Récurrence: Soit $d \in [0, n-1]$ Supposons $H(d)$

$(P_0, \dots, P_m)$ ~~forme~~ est une base de $\mathbb{A}_m[x]$,

Donc $\exists (d_0, \dots, d_m), \forall P \in \mathbb{A}_m[x], P = \sum_{i=0}^m d_i P_i$

ici $\deg(P) = d$ et $d_m = 1$. Donc

$$e(P) = \sum_{i=0}^m d_i e(P_i)$$

3a)

Soit $\lambda \in \mathbb{A}, P, Q \in \mathbb{A}_m[x]$,

$$e(\lambda P + Q)(x) = (x^2-1)(\lambda P + Q)'(x) + 5x(\lambda P + Q)(x)$$

$$= ((x^2-1)P)'(x) + 5xP(x) + ((x^2-1)Q)'(x) + 5xQ(x)$$

$$= e(P) + e(Q) \in \mathbb{A}_m[x]$$

Par linéarité de la dérivée

car par la 2b, $\deg(e(P)) = \deg(P)$

Donc $\mathbb{A}_m[x]$ est stable par e .

Donc $e \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_m[X])$

2) $\forall h \in [0, m], e$

$$\text{Mat}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m^2 - 4m \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} e(P_0) & e(P_1) & & e(P_m) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & 5 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & m(m-1) \\ \vdots & m^2 - 4m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & 0 \\ \vdots & m(m-1) \\ 0 & m^2 - 4m \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} P_0 \\ \vdots \\ P_m \end{matrix}$$

c) Soit $h \in [0, m]$, Soit $P \in \mathbb{R}_h[X]$,

$\deg(e(P)) = \deg(P)$. et $e(P)$ est un polynôme,
Donc $e(P) \in \mathbb{R}_h[X]$

Donc $\mathbb{R}_h[X]$ est stable par e

3) $\text{Mat}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} e(1) & e(x) & e(x^2) \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix} = [A]$

4a) Mat_e est triangulaire supérieure donc les valeurs propres sont sur la diagonale

Donc $\text{Sp}(e) = \{h(h+4), h \in [0, m]\}$ par identification

Soit $g: x \mapsto x(x+4)$ g est polynomiale donc dérivable
et $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = 2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Donc ~~Donc~~

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom(s)

Signature

Écriricome

Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille /

Numéro de table

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ et est strictement continue. Donc par le théorème de la bijection, g est bijective,

$$\text{ou } [0, m] \subset \mathbb{N}$$

Donc la restriction est également une bijection.

Donc $\forall h \in [0, m]^2$ $i \neq h$, $h(h+4) \neq i(i+4)$.

Donc les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes $\lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}_m[X])$ et

c) ~~admet~~ λ admet $m+1$ valeurs propres distinctes

Donc λ est diagonalisable

d) les valeurs propres étant toutes distinctes, et λ étant diagonalisable,

$$\text{on a } \mathbb{R}_m[X] = \bigoplus_{h=0}^m E_{h(h+4)}(\lambda).$$

$$\text{Donc } \dim(\mathbb{R}_m[X]) = m+1 = \sum_{h=0}^m \dim(E_{h(h+4)}(\lambda)) \text{ car intersection nulle}$$

et nécessairement il apparaît que $\forall h \in [0, m]$.

$$\dim E_{h(h+4)}(\lambda) = 1.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Donc $\exists! T_h$, $E_h(R+4)(e) = \text{Vect}(T_h)$.

et en posant $\Delta = \frac{1}{\text{C.D}}$ (C.D = coefficient dominant)

avec $G_h = \Delta T_h$.

on a $\exists! G_h$ unitaire tel que

$$E_h(R+4)(e) = \text{Vect}(G_h).$$

e)

$G_0 = 1$ car $\text{Ker } A = \text{Vect}(1)$.

$G_1 = x$ car $\text{Ker}(A - 5I) = \text{Vect}(x)$.

f) $\text{Ker}(A - 12I) = \text{Vect}(e_1 - 6e_3)$ (1a).

$$= \text{Vect}(1 - 6x^2).$$

$$= \text{Vect}(6x^2 - 1).$$

$$= \text{Vect}(x^2 - \frac{1}{6}).$$

$$\text{Donc } G_2(x) = x^2 - \frac{1}{6}$$

g) soit $h \in \mathbb{C}[m]$.

Soit $P(h) : \deg(G_h) = h$

initialisation pour $h = 0$

$$\deg(G_0) = \deg(1) = 0.$$

Donc $P(0)$ vraie.

Hérédité: Soit $h \in \mathbb{N} \setminus \{0, n-1\}$, supposons $P(h)$.

• S Soit $h \in \mathbb{N} \setminus \{0, n\}$. $P \in E_{h(h+1)}(\mathbb{C})$.

a) $Q'(x) = -P'(-x)$.

$Q''(x) = P''(x)$ Par composée.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$e(P(x)) = h(h+1)P.$$

Donc en $-x$,

$$e(P(-x)) = e(P) = h(h+1)Q.$$

Donc $\boxed{Q \in E_{h(h+1)}(\mathbb{C})}$.

7a) $\sin$ est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$, donc par changement de variable

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} t = \sin(s) \\ dt = \cos(s) ds. \end{array} \right. & \quad \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(s))^{\frac{3}{2}} \cos(s) ds. \\ & = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(s))^{\frac{3}{2}} \cos(s) ds \text{ par Pythagore} \\ & = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds. \end{aligned}$$

b) En remarquant que $\forall s \in \mathbb{R}, \cos^2(s) = \frac{\cos(2s) + 1}{2}$

on a donc $\boxed{\cos^4(s) = \frac{1}{8} (\cos(4s) + 4\cos(2s) + 3)}$
en développant.

c).

$$\begin{aligned} \|G_0\|^2 = \langle G_0, G_0 \rangle &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(4s) + 4\cos(2s) + 3) ds \\ &= \frac{1}{8} \left(\left[\frac{1}{4} \sin(4s) + 2 \sin(2s) + 3s \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left((0 + 0 + \frac{3\pi}{2}) - (0 + 0 + \frac{3\pi}{2}) \right) \\ &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

8a) $P \in \mathcal{M}_n[X],$
 $g: t \mapsto P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= P''(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} + P'(t)(-2t) \cdot \frac{5}{2} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= (P''(t)(1-t^2) - 5tP'(t))(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

8b)

$$\boxed{= -t(P)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom(s)

ECRICOME

Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

/

Numéro de table

$$\begin{aligned}
 8b) \quad \langle e^P(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 e(P) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \int_{-1}^1 ((t^2-1)P''(t) + 5tP'(t)) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Posons } u &= Q(t) & v' &= -e(P)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \\
 u' &= Q'(t) & v &= g(t). \quad (8a).
 \end{aligned}$$

u et v sont $e^1([-1, 1])$ donc Par Intégration par Parties.

$$\begin{aligned}
 \langle e(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 e(P)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} Q(t) dt \\
 &= \underbrace{[Q(t)g(t)]_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 g(t) Q'(t) dt. \\
 &= \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt
 \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c)

on en déduit que
$$\begin{cases} \langle e(p), r \rangle = \langle p', r' \rangle \\ \langle e(r), p \rangle = \langle r', p' \rangle \end{cases}$$

Donc ~~$\langle p, p \rangle$~~ $\langle e(p), r \rangle = \langle r, e(r) \rangle$

Donc e est un endomorphisme symétrique

d) Soit $i \neq n$,
Soit G_i ~~assez~~ vecteur propre associé à λ_1
 G_n associé à λ_2 , $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\langle e(G_i), G_n \rangle = \langle G_n, e(G_i) \rangle$$

Donc $\langle \lambda_1 G_i, G_n \rangle = \lambda_2 \langle G_n, G_i \rangle$.

$$\text{Donc } (\lambda_1 - \lambda_2) \langle G_i, G_n \rangle = 0.$$

or $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Donc $\langle G_i, G_n \rangle = 0$.

Donc $\mathcal{B}_n = (G_0, \dots, G_n)$ forme une famille orthogonale de $\mathcal{R}_n[x]$ et $\text{card } \mathcal{B}_n = \dim(\mathcal{R}_n(x))$.

Donc $\mathcal{B}_n$ forme bien une base de $\mathcal{R}_n[x]$.

e) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$$\text{Soit } P = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i G_i$$

car B_{n-1} est une base

$$\begin{aligned} \text{Donc } \langle P, G_n \rangle &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i \underbrace{\langle G_i, G_n \rangle}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \langle P, G_n \rangle = 0$$

$$\left[\text{Donc } G_n \in \mathbb{R}_{n-1}^\perp \right]$$

$$\begin{aligned} f) \quad \langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^1 P(t) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 Q(t) \underbrace{P(t)}_P (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \langle Q, P \rangle \end{aligned}$$

Donc $\langle, \rangle$ est symétrique.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, R, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + R, Q \rangle &= \int_{-1}^1 (\lambda P + R)(t) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \lambda \int_{-1}^1 P(t) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &\quad + \int_{-1}^1 R(t) Q(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \quad \text{par linéarité} \\ &= \lambda \langle P, Q \rangle + \langle R, Q \rangle. \end{aligned}$$

$\langle, \rangle$ est symétrique et linéaire, donc bilinéaire

$$\bullet \langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(H) P(H) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \int_{-1}^1 P^2(H) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \geq 0 \quad \text{Par positivité de l'intégrale.}$$

avec

$$\text{égalité} \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], P^2(H) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow P^2(H) = 0.$$

car $t \mapsto P^2(H) (1-t^2)^{\frac{3}{2}}$ est continue

ou P est

$$\Leftrightarrow P(H) = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 0_{\text{max}(x)} \quad \text{car } P \text{ est continue sur } [-1, 1] \text{ et est de degré fini}$$

Donc $\langle, \rangle$ est lien définie positive
Donc c'est lien un produit scalaire.

Problème:

1a) Soit $x \in]0, 1[$

$$\sum_{h=0}^n x^h = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad (\text{car } x > 0).$$

$$\text{Donc } \sum_{h=1}^n x^h = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - x^0 = \frac{x-x^{n+1}}{1-x}$$

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille /

Numéro de table

5) L) Soit $x \in]0, 1[$

Posez $f : x \mapsto \sum_{h=1}^n x^h = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$

~~En remarquant que~~

$$f'(x) = \sum_{h=1}^n h x^{h-1} = \frac{(1 - (n+1)x)(1-x) + x - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$\text{Donc } (1-x) \sum_{h=1}^n h x^h = -(n+1)x^{n+1} + n x^{n+1}$$

$$= x^n (nx - (n+1))$$

$$\boxed{\text{Donc } f'(x) = \frac{x^n (nx - (n+1))}{(1-x)^2}}$$

c) $\forall h \in \mathbb{N} \quad G\left(\frac{1}{d+h}\right)$

$$\text{Donc } E(h) = \frac{1}{d+h} \quad \boxed{d+h}$$

$$V(h) = \frac{1 - \frac{1}{(d+h)^2}}{\left(\frac{1}{d+h}\right)^2} = \boxed{d(d+h)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned} d) P(Y > n) &= P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [Y=k]\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Y=k) \quad \text{Par incompatibilité.} \\ \text{Posons } P &= \frac{1}{d+n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-P)^{k-1} P \\ &= (1-P)^n P \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) \\ &= \left(\frac{1}{d+n}\right)^n \end{aligned}$$

2a)

$$E(X|Y > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(Y=k) P(X=n).$$

3a)

~~$[Y \geq n]$~~ et $[Y=i]_{i \in \mathbb{N}}$ et $Y \geq n$ forment un système complet d'événement,

Donc par la formule de l'expérience totale. ~~probabilités totales~~

$$E(X) = \sum E(X|Y=i) + E(X|Y \geq n)$$

Partie 2:

$$4a) \boxed{U_m \in \mathcal{U}([0, d])}$$

$$\boxed{\text{Donc } E(U_m) = \frac{d}{2}}$$

5a)

$$S_2(\Omega) = \mathbb{Z} \cap [0, 2d]$$

5b) Soit $h \in S_2(\Omega)$, Par le théorème de convolution,
Puisque U_1 et U_2 sont indépendants.

$$P(S_2 = h) = \sum_{i=0}^{2d} P(U_1 = i) P(U_2 = h - i).$$

$$\text{or } P(U_1 = i) P(U_2 = h - i) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq i \leq d \\ 0 \leq h - i \leq d \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(S_2 = h) = \sum_{i=0}^d P(U_1 = i) P(U_2 = h - i)}$$

$$c) \quad =$$

$$d) \quad P(S_2 \geq d) = \sum_{h=d}^{2d} P(S_2 = h)$$

$$= \sum_{h=d}^{2d} \frac{2d+1-h}{(d+1)^2} = \sum_{h=1}^{d+1} \frac{h}{(d+1)^2}$$

Par Symétrie

$$\boxed{= \frac{1}{d+1}}$$

b)

a)

```
def Atteinte(d):  
    m = 0  
    S = 0  
    while S < d:  
        S = S + rd.randint(1, d+1)  
        m = m + 1  
    return(m).
```

c)

```
def ESPT(d, N):  
    E = 0  
    for h in range(N):  
        E = [Atteinte(d) for h in range(N)]  
    return  
    return sum(E) *  $\frac{1}{N}$ 
```

[On utilise la loi faible des grands nombres]

c) [On conjecture que $E(T) = e$]

7a)

7b) $\sum_{n \geq 1} P(V \geq n)$ converge,

Donc $\sum_{i=1}^V i P(X=i) + NP(V \geq N+1)$ converge.

Donc $\sum_{i=1}^{+\infty} i P(X=i)$ converge [Donc V admet une espérance]

Numéro d'inscription

Né(e) le

Nom

Prénom (s)

Signature



Épreuve :

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille /

Numéro de table

7c)

$$0 \leq N P(V \geq N+1) = N \sum_{h=N+1}^{+\infty} P(V=h) \leq \sum_{h=N+1}^{+\infty} h P(V=h)$$

$$\text{Or Puisque } V \text{ admet une espérance, } \sum_{h=N+1}^{+\infty} h P(V=h) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car c'est un reste.

Donc par encadrement $\boxed{NP(V \geq N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0}$

d) Donc par passage à la limite dans l'inégalité de la 7a.

$$\boxed{E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(V \geq n)}$$

0) Soit $n \in [0, \frac{1}{2}]$.

h est $e^{\frac{1}{1-t}}$ par composition avec la fonction inverse dont le dénominateur ne s'annule pas.

~~Mon~~ Soit $P_n(h) \forall h \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$

Pour $h=0$, $h^{(0)}(t) = \frac{1}{(1-t)^{1+1}} = h(t)$ Donc $P(0)$ vraie.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

Récurrence: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$$P(n+1) = (P(n))' = \frac{(n+1)! (-1)^{n+1} (1-t)^{n+1} \times (-1) (n+1)}{(1-t)^{2n+2n+2}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+1}}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Par principe de récurrence,

$$\forall t \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ est vraie.}$$

b) Soit $n \geq 1$ $x \in [0, 1]$

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{2n+1}} dt \right| \leq \int_0^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(1-t)^{2n+1}} dt \quad \text{Par inégalité triangulaire}$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} dt \quad \text{Par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$= 2^{2n+1} \int_0^x t^{n-1} dt \quad \text{Par changement de variable affine / symétrie}$$

$$= \left[2^{2n+1} \frac{x^n}{n} \right]$$

$$E(T) = \left(\frac{d+1}{d}\right)^d = e^{d \ln\left(\frac{d+1}{d}\right)}$$

$$\text{or } d \ln\left(\frac{d+1}{d}\right) = d \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) \underset{+\infty}{\xrightarrow{+\infty}} 1 \text{ car } \frac{1}{d} \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0$$

Donc Par Passage à la limite,

$$\boxed{E(T) \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} e^1}$$

Partie 3:

$$g_a) \quad f_i: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < d. \text{ ou } x > d. \\ \frac{1}{d} & \text{si } x \in [0, d]. \\ \text{-----} \end{cases} \quad \text{est une densité de } S_1.$$

$$\boxed{E(S_1) = \frac{d}{2}} \quad \boxed{V(S_1) = \frac{d^2 - 1}{12}}$$

régulière b)

$$S_2(\Omega) = [0, 2d], \quad \text{donc } f_2(x) = 0 \quad \forall x \in [0, d].$$

c) Soit $x \in [0, d]$, ~~Par~~ U_1 et U_2 sont indépendantes et à densité bornée, donc Par le théorème de convolution, S_2 admet une densité $f_{2, +\infty}$

$$\forall x \in S_2(\Omega), \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_1(x-t) dt$$

$$\text{or } f_1(t) f_1(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq x \end{cases}$$

Donc $\boxed{f_2(x) = \int_0^x f_2(t) dt.}$

d)

Donc $\boxed{f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{d^2} & \text{si } x \in [0, d] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

Soit $x \in]-\infty, 0[$

a) Puisque $f_n(x) = 0 \quad \forall n$, alors cela est nul au rang $\boxed{n+1}$