



V0-00092
811831
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Résultats géométriques.

1) Montrons par récurrence : $P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, on pose HR_k : $P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$

• Initialisation : $P\left(\bigcup_{i=1}^1 B_i\right) = P(B_1) = \sum_{i=1}^1 P(B_i)$

donc HR₀ est vérifiée

• Hérité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose HR_k vérifiée

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) + P(B_{k+1}) - \underbrace{P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}\right)}_{\geq 0}$$

d'après la formule du crible

$$\leq P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) + P(B_{k+1}) \quad \text{par positivité de la probabilité si deux}$$

$$\leq \sum_{i=1}^k P(B_i) + P(B_{k+1}) \quad \text{d'après HR}_k$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) \quad \text{donc HR}_{k+1} \text{ est vérifiée}$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$$

2) a) $\forall \theta \in]0, 1[:$

$$1 - \theta + \theta e^t > 0 \Leftrightarrow \theta e^t > \theta - 1 \\ \Leftrightarrow e^t > \frac{\theta - 1}{\theta}$$

or $\theta \in]0, 1[$ donc $\theta - 1 < 0$

Cette inégalité est donc vraie pour tout t élément de $\mathbb{R}$ par positivité de $t \mapsto e^t$

et si $\theta = 0$ alors $1 - \theta + \theta e^t = 1 > 0$

finalement les deux cas se rejoignent et :

pour θ élément de $[0, 1]$ et t élément de $\mathbb{R}$:

$$1 - \theta + \theta e^t > 0$$

Donc f est bien C^2 sur $\mathbb{R}$.
par approximations sur les fonctions usuelles.

$$\text{et comme } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{t}{4} + \theta - \frac{\theta e^t}{1 - \theta + \theta e^t}$$

$$\frac{t(1 - \theta + \theta e^t) + 4\theta(1 - \theta + \theta e^t) - 4\theta e^t}{4(1 - \theta + \theta e^t)}$$

$$= \frac{\theta e^t(t + 4(\theta - 1)) + t - \theta(t - 4 + 4\theta)}{4(1 - \theta + \theta e^t)}$$

en dérivant à nouveau, l'écrite d'après ci
dessus :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = \frac{1(\theta e^t(t+4\theta-3) + 1-\theta)(1-\theta+\theta e^t) - \theta e^t}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

↑
numérateur
de $f'(t)$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

f' est strict

$\forall t \in \mathbb{R}$

2) b) On a $f''(t) = \frac{1(1-\theta-\theta e^t)^2}{4(1-\theta-\theta e^t)^2} = 1/4 > 0$

donc f' est croissante or $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{4} + \theta - \frac{\theta e^t}{1-\theta+\theta e^t} = -\infty$

et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = +\infty$

avec $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ } cette valeur
est unique
d'après ce
qui précède

d'où :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘ $f(0)$ ↗		

or $f(0) = \frac{0}{8} + \theta(0) - \ln(1-\theta+\theta e^0)$
 $= -\ln(1) = 0$

Ainsi d'après ce qui précède pour tout réel $f(t) \geq 0$

Ainsi pour tout réel on a :

$$\frac{t^2}{8} + \theta t - \ln(1 - \theta + \theta e^t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \theta t - \ln(1 - \theta + \theta e^t) \geq -\frac{t^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - \theta + \theta e^t) - \theta t \leq \frac{t^2}{8}$$

en comparant par $t \mapsto e^t$, étant croissante il vient

$$1 - \theta + \theta e^t - e^{\theta t} \leq e^{\frac{t^2}{8}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (1 - \theta + \theta e^t - e^{\theta t}) = (1 - \theta)e^t - \theta e^{\theta t} \geq 0$$

donc $\rightarrow$ il suffit de vérifier

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) a) $t \mapsto e^t$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ par approximations sur les fonctions usuelles et il vaut-

$f'(t) = e^t$ et $f''(t) = e^t > 0$
par positivité stricte de l'exponentielle

i.e. $t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$

3) b) Soit $g : v \mapsto e^t$

On obtien alors par inégalité de convexité
 e^t est au dessus de ses tangentes

g' admet le détail

4) X est à valeurs dans un segment donc $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe par théorème de transfert $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe

On a : $\forall x \in [-\theta, 1-\theta]$ et $t \in \mathbb{R}$:
 $e^{tx} \leq (\theta + x) e^{(1-\theta)t} + (1-\theta-x) e^{-\theta t}$
par concavité de l'exponentielle, comme X est à valeurs dans $[-\theta, 1-\theta]$

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \mathbb{E}((\theta + X) e^{(1-\theta)t}) + (1-\theta-X) e^{-\theta t}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{mais comme } (\theta + X)e^{(1-\theta)t} + (1-\theta-X)e^{-t\theta} \\
 &= \theta e^{(1-\theta)t} + (1-\theta)e^{-t\theta} + Xe^{(1-\theta)t} - Xe^{-t\theta} \\
 &= \theta e^{(1-\theta)t} + (1-\theta)e^{-t\theta} + Xe^{-t\theta}(X-1) < 0
 \end{aligned}$$

comme X est à valeurs dans $[-\theta, 1-\theta]$
on a $X-1 < 0$

donc on peut majorer par :

$$\theta e^{(1-\theta)t} + (1-\theta)e^{-t\theta} \leq e^{t^2/8}$$

d'où finalement :

$$E(e^{tX}) \leq e^{t^2/8} \quad \left| \begin{array}{l} \text{d'après ce qui} \\ \text{précède.} \end{array} \right.$$

5) d'après l'inégalité de Markov pour $\varepsilon \geq 0$
appliquée à $\bar{X}_n - \mu$

$$P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\bar{X}_n - \mu)}{\varepsilon}$$

en comparant par l'exponentielle à droite par croissance de celle-ci il vient

$$P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{E(\bar{X}_n - \mu)}{\varepsilon}\right)$$

puis par linéarité de l'espérance.

$$P(\bar{X}_m - \mu \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{t(\bar{X}_m - \mu)})}{e^{t\varepsilon}}$$

comme aussi $e^{\frac{a}{b}} = \frac{e^a}{b}$

donc

$$P(\bar{X}_m - \mu \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{t(\bar{X}_m - \mu)})$$

$$\text{et } \bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k \text{ comme } \prod_{k=1}^m e^i = e^{i \sum_{k=1}^m 1}$$

il vient bien par linéarité de l'espérance comme

$$\text{aussi } \mathbb{E}(\bar{X}_m) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(X_k)$$

par linéarité et en utilisant
l'indépendance des X_k

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbb{E}(X_1)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mu = \mu$$

$$P(\bar{X}_m - \mu \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \prod_{k=1}^m \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}(X_k - \mu)\right)\right)$$

5) b)

d'après si desuurs on peut etablier comme $e^a e^b = e^{a+b}$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \exp(-t\varepsilon + \sum_{k=1}^n \frac{t}{n} (X_k - \mu)))$$

$$\leq \exp(-t\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t X_k)$$

$$\leq \exp(-t\varepsilon) E(e^{\frac{t}{n} X})$$

$$\leq \exp(-t\varepsilon) \exp(t^2/8m) \text{ d'après la question 4.}$$

$$= \exp(-t\varepsilon + \frac{t^2}{8m})$$

mais comme ~~$-t\varepsilon + \frac{t^2}{8m} = -\frac{8mt\varepsilon + t^2}{8m}$~~

~~$\forall t \in \mathbb{R}$~~

~~$-t\varepsilon + \frac{t^2}{8m} = -2m\varepsilon^2$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{t^2}{8m} - t\varepsilon + 2m\varepsilon^2 = 0$~~

~~$d' A =$~~

En prenant $t = 4m\varepsilon$ on obtient

$$\frac{(4m\varepsilon)^2}{8m} - 4m\varepsilon\varepsilon = 2m\varepsilon^2 - 4m\varepsilon^2 = -2m\varepsilon^2$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Ainsi $t = 4m\varepsilon$ comment et on a bien :

$$P(\bar{X}_m - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(-2m\varepsilon^2)$$

en reprenant l'inégalité précédente pour $t = 4m\varepsilon$

6) $1 - X_1, \dots, 1 - X_m$ sont toutes les mêmes variables

~~car les X_i sont indépendantes~~

$$P(\bar{X}_m - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(-2m\varepsilon^2)$$

donc

$$P(\bar{X}_m - \mu \leq \varepsilon) \leq 1 - \exp(-2m\varepsilon^2)$$

en considérant les $1 - X_i$ il vient (j'admet)

$$P(\bar{X}_m - \mu \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2m\varepsilon^2)$$

7) $\bar{X}_n$ est représentatif des X_i (échantillon)
mais ne dépend pas de μ c'est donc un
estimateur de μ et comme :

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$$

donc

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq 1 - \exp(-2n\varepsilon^2)$$

donc

$$P(\bar{X}_n - \varepsilon \leq \mu \leq \bar{X}_n + \varepsilon) \leq 1 - \exp(-2n\varepsilon^2)$$

en posant $\varepsilon = \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}}$ il vient

$$P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}} ; \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}}\right]\right) \leq$$

$$1 - \exp\left(-2n \frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}\right) \leq 1 - \exp(\ln(\alpha)) = 1 - \alpha$$

d'où

$$P\left(\mu \in \left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}} ; \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}}\right]\right) \leq 1 - \alpha$$

i.e. $\left[\bar{X}_n - \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}} ; \bar{X}_n + \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}}\right]$ est un intervalle

de confiance au niveau $1 - \alpha$.

Utilisation d'une table SQL.

8) a) On considère $I_{100}(w)$

donc la 100 ième action de résultat w les x, y attribuant les récompenses à la y -ième action la requête renverra tout les résultats (donc action) de la y -ième action

b) `SELECT Numera FROM Bandit
WHERE Action = 2 AND Recompense
!= 0.`

c) `SELECT COUNT(Numera)
FROM table Bandit WHERE
action = 1`

(d'ajouter la commande 8. d)

d) C'est une bonne estimation de la récompense totale moyenne (en fonction des données statistiques comme $n > 1000$, l'échantillon est représentatif) pour l'action 2 lorsque celle-ci est effectuée une n -ième fois.

La Stratégie ETC et une majoration de son objet moyen.

9) a) X_j est la récompense de la I_j action qui vaut 1 ou 0 d'où $[X_j = 1]$ et cela pour tant les éventualités de I_j qui est à valeur dans $[1, n]$

$$\begin{aligned} \text{d'où } E(X_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{g \in X_j(\Omega)} g P(X_j = 1 \cap [I_j = i]) \\ &= \sum_{i=1}^n P([X_j = 1] \cap [I_j = i]) \end{aligned}$$

comme $X_j(\Omega) = \{0, 1\}$

9) b) $[X_j = 1] \cap [I_j = i]$ signifie que la j ère action a obtenu une récompense donc $X_{i,k} \neq 0$ donc $X_{i,k} = 1$ comme $X_{i,k}(\Omega) = \{0, 1\}$ de plus on doit avoir le nombre d'apparition de i donc considéré $N_{i,j} = 1$ en fin cela est à considérer pour tout k

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

donc il vient-

$$[X_g = 1] \cap [I_g = i] = \bigcup_{k=1}^n [X_{i,k} = 1] \cap [I_g = i] \cap [N_{i,g} = k]$$

en passant au probabilité par union disjointe
 $X_{i,g}$ et I_g indépendantes il vient :

$$P([X_g = 1] \cap [I_g = i]) = \sum_{k=1}^n P([X_{i,k} = 1] \cap [I_g = i] \cap [N_{i,g} = k])$$

$$\begin{aligned} \text{c) et donc : } E(X_g) &= \sum_{i=1}^n P([X_g = 1] \cap [I_g = i]) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P([X_{i,k} = 1] \cap [I_g = i] \cap [N_{i,g} = k]) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n P([X_{i,k} = 1]) P([I_g = i] \cap [N_{i,g} = k])$$

d'après la formule des probabilités composées

$$= \sum_{i=1}^n P_i \cdot \sum_{k=1}^n P([I_g = i] \cap [N_{i,g} = k])$$

on applique la formule des probabilités totales.

comme $p_i = P(X_{i,j} = 1)$

car $X_{i,j} \subset B(p_i)$

enfin d'après la formule des probabilités totales,

avec le système complet d'événements $N_{i,j}(u)$
 $u \in \Omega$ on a bien finalement d'après
 ce qui précède)

$$E(X_j) = \sum_{i=1}^n p_i P(I_j = i)$$

or $\forall i \in [1, n]$ on a $p_i \leq p^*$
 comme $p^* = \max_{i \in [1, n]} p_i$

$$\begin{aligned} \text{donc } E(X_j) &\leq \sum_{i=1}^n p^* P(I_j = i) \\ &= p^* \sum_{i=1}^n P(I_j = i) \end{aligned}$$

Or $I_j(\Omega) = [1, n]$ donc

$$\sum_{i=1}^n P(I_j = i) = 1$$

d'où finalement $E(X_j) \leq p^*$

$$10) a) E(N_i, n) = \sum_{y \in N_i, N(n)} y P(N_i, n = y)$$

mais encore N_i, n compte le nombre de fois où un I_k a donné le résultat i . comme les I_y sont indépendants et donne i avec probabilité $P(I_y = i)$ il suffit de les sommer de $y=1$ à $y=n$ pour avoir $E(N_i, n)$

$$\text{d'où : } E(N_i, n) = \sum_{y=1}^n P(I_y = i)$$

$$10) b) E(\Delta_m) = E(m p^* - P_m)$$

$$= E(m(\delta_i + p_i) - \sum_{j=1}^m X_j)$$

d'après l'énoncé et comme $\delta_i = p^* - p_i \Rightarrow p^* = \delta_i + p_i$

$$= E(m(\delta_i + p_i)) - \sum_{j=1}^m E(X_j) \quad \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de l'espérance} \end{array}$$

$$= \sum_{j=1}^m (\delta_i + p_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n p_i P(I_j = i) \quad \begin{array}{l} \text{d'après} \\ \text{g.c)} \end{array}$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(p_j + \delta_j \cdot \sum_{i=1}^n p_i P(I_j = i) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \delta_i E(N_i, n)$$

↓ j' colonne

en reconnaissant $E(N_i, n) = \sum_{j=1}^m P(I_j = i)$.

1.1) Soit $I_j \subset \mathcal{N}(\Pi_1, \Pi_2)$

donc $\forall i \in \Pi_1, \Pi_2, \forall j \in \Pi_1, \Pi_2$

$$P(I_j = i) = \frac{1}{n}$$

$$\text{et donc } E(N_i, n) = \sum_{j=1}^m P(I_j = i)$$

$$= \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

d'où en remplaçant :

$$E(\Delta_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées ESSEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

12) $\hat{X}_{1,6}(u) = \frac{1}{N_{1,6}(u)} \sum_{k=1}^{N_{1,6}(u)} \dots$

je n'aboutis pas.

13) def fonction_PythenZ(m, r, Rec)

$Z = 0$

for k in range(1, r+1):

$Z = Z + Rec[m]$

return Z

14) $N_{i,mr} = m$

On en déduit alors :

$$X_{i,mr} = \frac{1}{N_{i,mr}} \sum_{k=1}^{N_{i,mr}} X_{i,k} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_{i,k} = \bar{X}_{i,m}$$

27/30

15) b) . Ainsi on a $\hat{X}_{i,mn} = \bar{X}_{i,m}$
 donc en reprenant comme en

5. b) comme $E(\bar{X}_{i,m}) = E(X_i) = p_i$

$$P(\hat{X}_{i,mn} - p_i \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_{i,m} - p_i \geq \varepsilon) \leq \exp(-2m\varepsilon^2)$$

de même que en 5. c en considérant
 les $1 - X_{i,m}$

il vient
$$P(\hat{X}_{i,mn} - p_i \leq -\varepsilon) \\ = P(\bar{X}_{i,m} - p_i \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2m\varepsilon^2)$$

15) On a $E(N_{i,m}) = \sum_{j=1}^m P(I_j = i)$
 d'après 10. a) -

$$= \sum_{j=mn+1}^m P(Z_m = i) + \sum_{j=1}^{mn} P(I_j = i)$$

comme si $mn < j \leq m$ alors $I_j(\omega) = Z_m(\omega)$

$$= \underbrace{(m - mn) P(Z_m = i)}_{j \in [mn+1, m]} + mn \quad \text{comme}$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(Z_m = i) \leq \mathbb{P}(\hat{X}_{i,mn} - \hat{X}_{S,mn} \geq 0)$$

(γ arbitraire)

donc d'après ce qui précède

$$\mathbb{E}(N_{i,m}) \leq m + (m - mn) \mathbb{P}(\hat{X}_{i,mn} \geq \hat{X}_{S,mn})$$

ss) b) γ arbitraire

ss) c) donc d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_{i,m}) &\leq m + (m - mn) \mathbb{P}(X_{i,mn} - p_i \geq \frac{\delta_i}{2}) + \\ &\quad (m - mn) \mathbb{P}(p_S - \hat{X}_{S,mn} \geq \frac{\delta_i}{2}) \\ &\leq m + 2(m - mn) \exp(-2mn (\frac{\delta_i}{2})^2) \end{aligned}$$

d'après 14 - b)

$$= m + 2(m - mn) \exp(-mn \frac{\delta_i^2}{2})$$

$$\leq m + 2m \exp(-mn \frac{\delta_i^2}{2})$$

comme $mn \geq 0$ comme $n \geq 0$ et $m \geq 0$

16) a)

On a d'après 10.b)

$E(\Delta_m) = \sum_{i=1}^n \delta_i (E(N_i, m))$ or 0 dans
la majoration suivante :

$$E(\Delta_m) \leq \sum_{i=1}^n \delta_i \left(m + 2m \exp\left(-m \frac{\delta_i^2}{2}\right) \right)$$

et en développant :

$$\leq m \sum_{i=1}^n \delta_i + 2m \sum_{i=1}^n \delta_i \exp\left(-m \frac{\delta_i^2}{2}\right)$$

16) b) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

or $\forall x > 0 : e^x > x e$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e} > x \Leftrightarrow e^{x-1} > x$$

mais $\Phi : x \mapsto e^{x-1} - x$ est
croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\Phi(0) = e^{-1} > 0$
donc on a bien $e^{-x} > x e$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x e} \quad \text{par décroissance de la fonction inverse}$$

$$\text{i.e. } e^{-x} \leq \frac{1}{x e}$$

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées ESSEC		
	Consignes - Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer - Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir - Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) - Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) - Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre		

et donc on en déduit : $\forall i, \delta_i \neq 0$

$$E(\Delta_m) \leq m \sum_{i=1}^n \delta_i + 2n \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{1}{m \frac{\delta_i^2}{2} \rho}$$

$$= m\alpha + 2m \sum_{i=1}^n \frac{1}{m \frac{\delta_i}{2} \rho}$$

mais comme $\rho \sim 2.7$ on a $\frac{\rho}{2} > 1$

d'où la majoration suivante

$$\leq m\alpha + 2n \sum_{i=1}^n \frac{1}{m \delta_i}$$

$$= m\alpha + \frac{2n}{m} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta_i} = m\alpha + \frac{2n}{m} \beta$$

c) posons $m = \left\lfloor \sqrt{\frac{2n\beta}{\alpha}} \right\rfloor + 1$

en particulier $\lim_{m \rightarrow +\infty} m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\lfloor \sqrt{\frac{2n\beta}{\alpha}} \right\rfloor + 1 = +\infty$

donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq m_0, m > \varepsilon$

en particulier il existe m assez

pour que $m \geq 2$

je n'aboutit pas avec le tel $m_1 < m$.

$$\text{et donc } E(\Delta_m) \leq \left(\left\lfloor \sqrt{\frac{2nB}{\alpha}} \right\rfloor + 1 \right) \alpha + 2m \frac{B}{\left(\left\lfloor \sqrt{\frac{2nB}{\alpha}} \right\rfloor + 1 \right)}$$

pour m assez grand $m < m_1$

$$\leq m_1 \alpha + 2m \frac{B}{m_1}$$

$$\leq \sqrt{8\alpha B} \sqrt{m} + \alpha \quad (\text{je s'admet})$$

Donc Stratégie UCB et une majoration de
San regret.

$$17) \text{ On a } P(\bar{X}_{i,j} - p_i \leq -\gamma) \leq \exp(-2m\gamma^2)$$

$$= \exp\left(-2m \left(\frac{-\ln(\theta)}{2j} \right)^2\right) \quad \text{car } j \in [1, m]$$

donc la majoration sur toute

$$\leq \exp(\ln(\theta)) = \theta$$

18) a).

$N_{i,n}$ compte le nombre d'occurrences
d'indice $k \in [1, n]$ tels que
 $I_k(w) = i$ or $\exists! k \in [1, n]$
t'el que $I_k(w) = 1$ car si $j \in [1, n]$
dans $I_j(w) = 1$
donc $N_{i,n} = 1$

et donc :

$$X_{i,n} = \frac{1}{N_{i,n}} \sum_{k=1}^{N_{i,n}} X_{i,k} = \sum_{k=1}^1 X_{i,k} = X_{i,1}$$

par définition d'après si dessus.

18) b) ~~def fonction_PythonBernoulli(p):~~
 ~~$P = \text{rsi.random}()$~~
~~return(P)~~

def PythonBernoulli(P): # Grand P, petit
 $P = 0$
if $\text{rsi.random}() > P$: P
 $P = 0$
else:
 $P = 1$
return(P)

c) def mag(hat, N, i, P):
 $R = 0$
 for k in range(N):
 $R = R + \frac{1}{N} \text{hat}(X)$
 return(R)

19)

for j in range(1, m):

comme $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$More = More + \text{mag}(\text{hat}X, N, j, P)$
 $I[j] = j$

↙ comme s. $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$
 alors $I(j) = j$
 ce qui est le cas avec la
 for k in range(1, n) -

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Maths II

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

20) a) : Supposons $[N_i, m > u]$ résolue.
 j'admet la première partie -
 et la deuxième.

20) b) Supposons $[N_i, m > u]$ résolue
 donc $[V_i, u \geq \min_{j \in [1, m-1]} u_{s,j}]$ satisfait.

et donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$,

$[V_i, u \geq \lambda] \cup [\min_{j \in [1, m-1]} u_{s,j} \leq \lambda]$

j'admet $\Rightarrow [\min_{j \in [1, m-1]} v_{s,j} \leq p_s] \cup [V_i, u \geq p_s]$

est résolue i.e. A_i, u est résolue

et donc $[N_{i,m} > u] \Rightarrow$ " $A_{i,u}$ s'achève
 $[N_{i,m} > u]$
 est violée".

$$\Rightarrow [N_{i,m} > u] \subset A_{i,u}$$

donc en passant aux probabilités

$$P(N_{i,m} > u) \leq P(A_{i,u})$$

donc

$$P(N_{i,m} = k) = P(N_{i,m} > u) \underbrace{P(N_{i,m} > u-1)}_{\text{violation}} \leq P(A_{i,u})$$

~~donc en sommant de $k=1$ à m et en multipliant~~

en sommant de $k=1$ à $k=m$

$$\sum_{k=1}^m P(N_{i,m} > u) \leq \sum_{k=1}^m P(A_{i,u})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^m P(N_{i,m} > u) \leq m P(A_{i,u})$$

$$\Rightarrow \underline{(\text{à utiliser})} : \underline{E(N_{i,m}) \leq u + P(A_{i,u})m}$$

21) a) on a d'après la question 17 :

$$\mathbb{P}(\bar{X}_{i,\gamma} + \gamma \leq p_i) \leq \theta \quad \text{d'après l'énoncé}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(V_{i,\gamma} + \sqrt{\frac{\ln(m)}{\gamma}} + \sqrt{\frac{-\ln(\theta)}{2\gamma}} \leq p_i) \leq \theta$$

q'admet.

b) Supposons $\delta_i - \sqrt{\frac{\ln(m)}{n}} \geq 0$

$$\text{donc } \mathbb{P}(V_{i,\gamma} \geq p_s) \leq \exp(-2m(p_s)^2)$$

d'après 5.b.

or $p_s = \delta_i + p_i$ donc comme $\delta_i - \sqrt{\frac{\ln(m)}{n}}$

$$\text{il vient } p_s \geq \delta_i - \sqrt{\frac{\ln(m)}{n}}$$

d'où la majoration comme $u \in [0, n-1]$
par décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$ de
 $t \mapsto e^{-t}$

$$\mathbb{P}(V_{i,u} \geq p_s) \leq \exp(-2u(\delta_i - \sqrt{\frac{\ln(m)}{n}})^2)$$

$$c) \left[\frac{\ln(m)}{\delta_i^2}, +\infty \right[\subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{et } (\delta_i \sqrt{t} - \sqrt{\ln(m)}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} > \frac{\sqrt{\ln(m)}}{\delta_i}$$

$$\Leftrightarrow t > \left(\frac{\sqrt{\ln(m)}}{\delta_i} \right)^2$$

ce qui est vrai d'après l'énoncé
donc par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$
sur $\mathbb{R}_+$

$$t \mapsto \exp(-2(\delta_i \sqrt{t} - \sqrt{\ln(m)})^2)$$

est bien décroissante sur $\left[\frac{\ln(m)}{\delta_i^2}, +\infty \right[$

$$\text{Comme } 2(\delta_i \sqrt{t} - \sqrt{\ln(m)})^2 \geq 0$$

pour tout l'élément de cette ensemble.

d) Ainsi pour n assez grand
s'ensuit

$$\underline{P(V_{i,n} \geq p_s)} \leq \exp\left(\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$\leq \underline{\frac{1}{n^2}}.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement QR Code	Code épreuve : 287	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Maths II		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

Mais $\boxed{P(A_{i,n})} = P(\min_{j \in \{1, \dots, m-1\}} U_{s,j} \leq p_s)$
 $+ P(V_{i,n} \geq p_s) - P(\min_{j \in \{1, \dots, m-1\}} U_{s,j} \leq p_s \mid V_{i,n} \geq p_s)$
 d'après la formule du crible
 $\leq P(V_{i,n} \geq p_s) + P(\min_{j \in \{1, \dots, m-1\}} U_{s,j} \leq p_s)$
 par positivité des probabilités
 $\leq \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}$ d'après 2.3) a) et ce qui précède
 $\boxed{\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m}}$

22) On a : ~~$E(N_i, m) = \sum_{j=1}^m P(I_j = i)$~~
~~d'après 10. a)~~

$E(N_i, m) \leq m + 2 \exp\left(-m \frac{\delta_i^2}{2}\right)$
 d'après 15) c)

en posant $m = \left\lfloor \sqrt{\frac{4 \ln(m)}{\delta_i^2}} \right\rfloor + 1$

d'ailleurs $E(N_i, m) \leq \frac{4 \ln(m)}{\delta_i^2} + 3$

mais $E(\Delta_m) = \sum_{i=1}^{\wedge} \delta_i E(N_i, m)$

d'après 10. b) $\leq \sum_{i=1}^{\wedge} \delta_i \left(\frac{4 \ln(m)}{\delta_i^2} + 3 \right)$

$= \sum_{i=1}^{\wedge} \frac{4 \ln(m)}{\delta_i} + 3 \underbrace{\sum_{i=1}^{\wedge} \delta_i}_{\alpha}$

$= 4 \sum_{i=1}^{\wedge} \frac{\ln(m)}{\delta_i} + 3 \alpha$

$= 4 \ln(m) \beta + 3 \alpha$

comme $\alpha = \sum_{i=1}^{\wedge} \delta_i$
 et $\beta = \sum_{1 \leq i \leq \wedge, \delta_i \neq 0} 1/\delta_i$

FIN

