

Copie anonyme - n°anonymat : 811831



VO-00092
811831
Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n° 1 : Partie A.

1) a) D'après l'énoncé la fonction g
est définie sur D et $\forall (x, y) \in D^2$
 $1 + xy > 0$

Donc g est bien C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par opérations
sur les fonctions usuelles et on a :

$$\partial_1 g(x, y) = 1 + \frac{y}{1 + xy}$$

et

$$\partial_2 g(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

$\forall (x, y) \in D^2$

$$\text{d'où } \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{1 + xy} \\ \frac{x}{1 + xy} \end{pmatrix}$$

1) b) de plus toujours d'après l'énoncé
 $\forall (x, y) \in D^2$, $xy + 1 > 0$ donc
 f est bien C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par opération
 sur les fonctions usuelles et on a :

$$\forall (x, y) \in D^2$$

$$\text{On résout : } \nabla f(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{1+xy} = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ comme : } \begin{matrix} 1+xy > 0 \\ \text{pour tout} \\ (x, y) \in D^2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -(1+xy) \Rightarrow y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ainsi l'unique point critique admet par f dans D
 est $(0, -1)$

c) de plus toujours d'après l'énoncé $\forall (x, y) \in D^2$
 $xy + 1 > 0$ donc f est bien C^2 sur $\mathbb{R}^2$
 par opérations sur les fonctions usuelles et
 on a pour tout (x, y) éléments de D^2

$$\partial_{x,y} f(x, y) = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}$$

$$\partial_{x,2} b(x,y) = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$$

et d'après le théorème de Schwarz,

$$\partial_{1,2} b(x,y) = \partial_{2,1} b(x,y) = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$$\text{d'où finalement : } \nabla^2 b(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc : } \nabla^2 b(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \det(\nabla^2 b(0,-1) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 + \lambda - 1$$

$$\text{or } \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{or } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > \frac{-1+\sqrt{4}}{2} = 1/2 > 0$$

$$\text{et } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Donc les valeurs propres de $(\nabla^2 b(0,-1) - \lambda I)$,
ne sont pas de même signes ont à donc
faire à un point selle.

2) a) $\forall (x, y) \in \mathbb{D}^2$:

$$f(x, y) = k \Leftrightarrow x + \ln(1 + xy) = k$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + xy) = k - x \Leftrightarrow 1 + xy = e^{k-x}$$

$$\Leftrightarrow xy = e^{k-x} - 1 \Leftrightarrow y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}$$

voici le programme demandé :

b) $k = [-0.4 + i/5 \text{ for } i \text{ in range}(8)]$
 $X = \text{np.linspace}(-2, 2, 100)$

for k in K :

$$M = [\text{np.exp}(k-x) - 1 / x \text{ for } x \text{ in } X]$$

$$\text{plt.plot}(X, M, \text{color} = 'black')$$

$$\text{plt.xlim}(-2, 2)$$

$$\text{plt.ylim}(-3, 1)$$

$$\text{plt.show}()$$

Partie B : Etude de la ligne de niveau zéro

3) $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1$
 $x < 0$

d'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^{-x} - 1$	+	0	-
x	-	0	+
$g(x)$	-		-

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) (suite) Ainsi pour tout x éléments de $\mathbb{R}^*$:

$$g(x) < 0 \quad \text{ie } g \text{ est négative sur } \mathbb{R}^*$$

4) On reconnaît le taux d'accroissement
 $h: x \mapsto e^{-x}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = h'(0) = -1$
Ainsi en posant $g(0) = -1$ on a bien
prolongé g en 0

5) Écrivons : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{x^2}$$

On $x = o(e^x)$
d'où par croissance comparée

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$$

Ainsi g est dérivable
en 0 et $g'(0) = 1$

6) a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$ g est C^1 par opérations sur les fonctions usuelles comme $x \neq 0$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-xe^{-x} - (e^{-x} - 1)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - e^{-x}(1+x)}{x^2}$$

On $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x}(1+x) > 0$

• Si $x \in \mathbb{R}_*^+$ $1 - e^{-x}(1+x) > 0$

$$\Leftrightarrow -e^{-x}(1+x) > -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}(1+x) > 1$$

$$\Leftrightarrow (1+x) > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

par continuité de l'exponentielle toujours vrai.

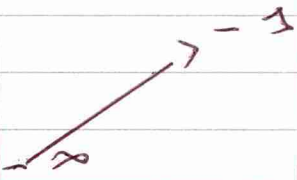
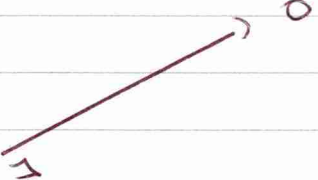
$$c) \quad e^{-x} - 1 \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} e^{-x}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$$

pour
les sommes
composées
et produits.

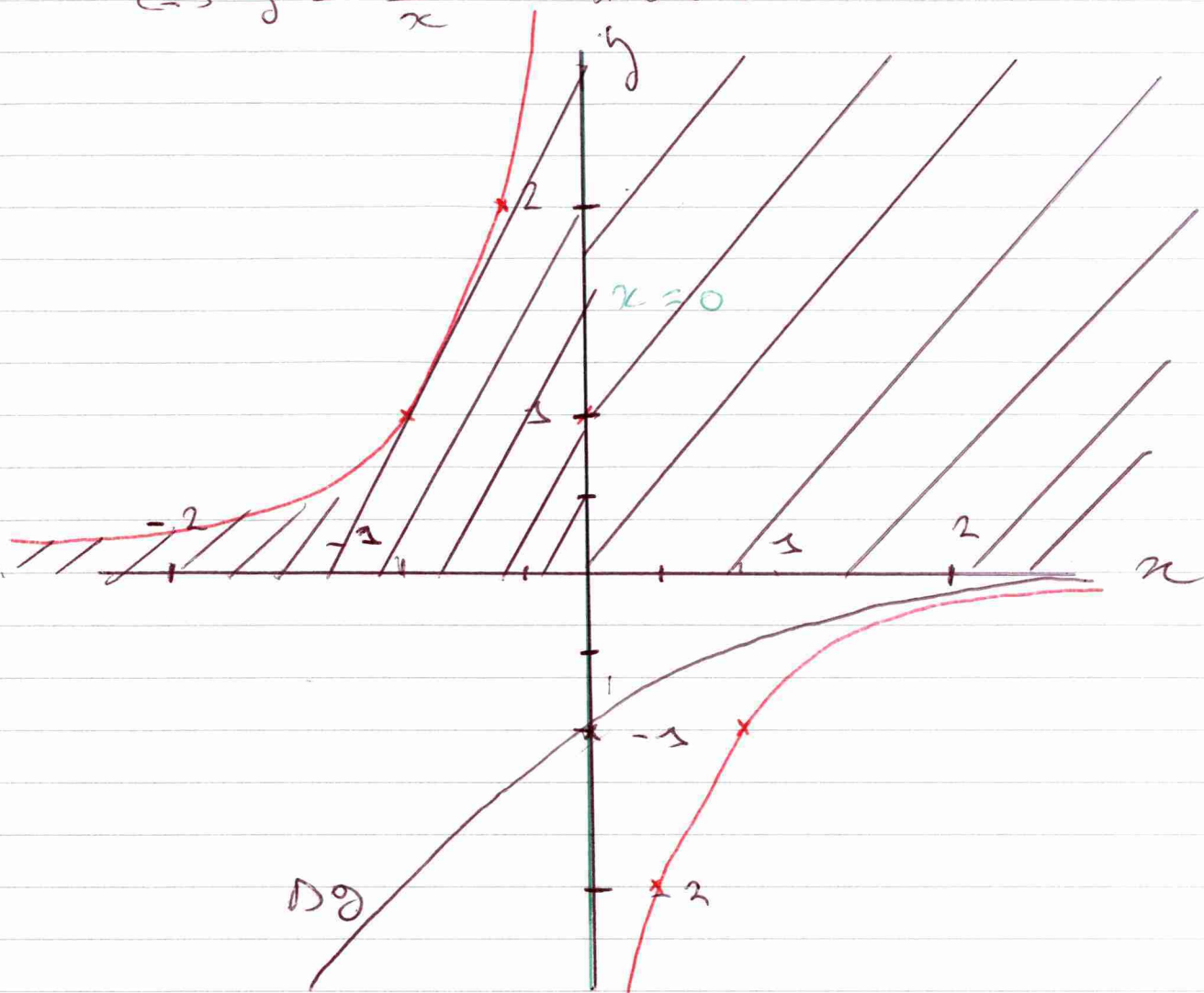
$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

D'où le tableau de variation de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
$g(x)$	$-\infty$ 	-1	0 

En gardant $g(0) = -1$

7) On a $1 + xy = 0 \Leftrightarrow xy = -1$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$ d'où :



b). Si $(x, y) \in \mathbb{R}^+$ on a bien $f(x, y) > 0$
 et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^- \cap D)^2$ on a aussi $f(x, y) > 0$
 (voir ces zones hachurées ci-dessus)

Partie c) Aire de la surface délimitée par la ligne de niveau z=0.

8) G est la primitive de g^V qui s'annule en 0

Or g est dérivable donc d'après le théorème
 fondamental de l'analyse G est bien
 définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on
 admettant pour son existence le prolongement)

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

de g en 0. et $G'(x) = g(x) = e^{-\frac{x}{x}} - 1$

(Pour tout x élément de $\mathbb{R}$) -

pour tout $x > 0$

$$g) \text{ On a d'abord } G(x) = \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt$$

(d'après la relation de Charles -)

$$= \underbrace{\int_0^1 g(t) dt}_{G(1)} + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

(Par linéarité de l'intégrale)

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} - [\ln(t)]_1^x$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} - \ln(x) + \underbrace{\ln(1)}_0$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} - \ln(x)$$

-10)

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$
 par croissance comparée

On $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge étant une intégrale
 de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ avec $\alpha > 1$
 donc par comparaison d'intégrale à termes positifs
 comme pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\frac{e^{-x}}{x} > 0$

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ converge i.e. c'est une quantité
 finie.

De même $G(1)$ étant une intégrale sur
 un segment (qui n'est pas impropre comme
 on a par $g(0) = -1$ c'est donc également
 une quantité finie.

Enfinement en posant $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} = e$
 on e est finit il vient

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e - \ln(x)$ or
 $e - \ln(x) \xrightarrow{+\infty} -\ln(x)$

d'au $G(x) \sim -\ln(x)$ $x \rightarrow +\infty$

11) On a pour $x > 0$ voisin de 0 :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

(Par relation de Ehasles)

$$= \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \left(\int_0^x \frac{e^{-t} - 1 + 1}{t} dt \right)$$

$$= \overbrace{G(1)} - \left(\int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_0^x \frac{1}{t} dt \right)$$

On $e^{-t} - 1 \sim -t$ $t \rightarrow 0$

d'au un voisinage de pour x voisin de 0 :

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} G(1) - \left(\int_0^x -\frac{t}{t} dt + \int_0^x \frac{1}{t} dt \right) + o(x)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} G(1) + \int_0^x 1 dt - \int_0^x \frac{1}{t} dt + o(x)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} G(1) + x - \ln(x) + o(x)$$

(en utilisant la dernière étape)

Exercice n° 2 :

Partie A : Un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

Soit M et M' deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$
et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda M + M') &= \text{tr} \left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix} = \lambda a + a' + \lambda d + d' \end{aligned}$$

$$= \lambda(a + d) + a' + d' = \lambda \text{tr}(M) + \text{tr}(M')$$

Ainsi tr est bien linéaire.

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 38	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques Appliquées Em Lyon		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

$$2) a) \bullet t_a(M)I = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (t_a(M)I - M) \in M_2(\mathbb{R})$$

• de plus pour $(M, M') \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E(\lambda M + M') &= t_a(\lambda M + M')I - (\lambda M + M') \\ &= \lambda t_a(M) + t_a(M') - (\lambda M + M') \\ &= \lambda(t_a(M) - M) + t_a(M') - M' \\ &= \lambda E(M) + E(M') \end{aligned}$$

} comme
t_a est
linéaire
d'après la
question
précédente.

Ainsi E est bien linéaire

• Conclusion : E est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

2)

$$\begin{aligned} b) \underline{E(I)} &= t_a(I)I - I = (1+1)I - I \\ &= \underline{2I - I = I} \end{aligned}$$

2) c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$
 On a $\mathcal{E}(M) = \text{tr}(M)I - M = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

d' où $\text{tr}(\mathcal{E}(M)) = \text{tr} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = d + a =$
 $\text{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{tr}(M)$

3) a) d' après ce dessus comme $\mathcal{E}(M) = \begin{pmatrix} d-b & \\ c & a \end{pmatrix}$
 $\mathcal{E}(E_1) =$
 $\mathcal{E} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

$\mathcal{E}(E_2) = \mathcal{E} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_2$

$\mathcal{E}(E_3) = \mathcal{E} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_3$

$\mathcal{E}(E_4) = \mathcal{E} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$

d' où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$b) A^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = I_4$$

Ainsi $A^2 = I_4$ donc $A \times A = I_4$

on en déduit que A est inversible

est $A^{-1} = A$ (car $A \times A = I_4$)

c) $X \mapsto X^2 - 1$ est un polynôme de A (car $A^2 = I$ il vient $A^2 - I = 0$)

donc $\text{Sp}(A) \subset \{ X \in \mathbb{R} / X^2 - 1 = 0 \}$

$$= \{-1, 1\}$$

$$\text{On } A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on en notant E_1, E_2, E_3, E_4 ses vecteurs colonnes on a : $E_1 = -E_4$ donc $\text{rg}(A - I) \neq 4$

i.e $(A - I)$ n'est pas inversible donc 1 est

un valeur propre de A .

$$\text{De même } A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on } E_2 \text{ et } E_3$$

sont nul et $E_4 = E_1$ donc $\text{rg}(A + I) = 2 \neq 4$

i.e $A + I$ est non inversible donc -1 est bien valeur propre de A .

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Recherchons à présent $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
 t'êlle que $AX = X$: i.e un vecteur propre associé
 à la valeur propre 1.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ -y = y \\ -z = z \\ x = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z = 0 \end{cases}$$

d'où : $\underline{E_1(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$
 $= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et $AX = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ -y = -y \\ -z = -z \\ -t = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

d'où $\underline{E_{-1}(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
 $= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Code épreuve : 206

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées Emlyon.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B : Sans formules d'inversion.

4) $E(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (d'après la question 2.c) (où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$)

une matrice étant un tableau de nombres.

$$\begin{aligned} \det M E(M) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ad - bc & -ba + ab \\ cd - dc & ad - bc \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(M) I = (ad - bc) I = \begin{vmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{vmatrix}$$

d'où $M E(M) = \det(M) I$

5) a) d'après le cours M est inversible
 si et seulement si $\det(M) \neq 0$
 i.e. $ad - bc \neq 0$ et si $\det(M) \neq 0$:

comme $M E(M) = \det(M) I$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\det(M)} M (E(M)) = I \Leftrightarrow M \left(\frac{1}{\det(M)} E(M) \right) = I$$

comme $\frac{1}{\det(M)}$ est une constante.

i.e. M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$

et comme $M \left(\frac{1}{\det(M)} E(M) \right) = I$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} E(M)$$

5) b) Soit $A = M + N$ (en assumant $\det(A) \neq 0$)
 d'après ci-dessus :

$$(M+N)^{-1} =$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} E(A)$$

or E est linéaire d'où

$$= \frac{1}{\det(M+N)} E(M+N) = \frac{1}{\det(M+N)} (E(M) + E(N))$$

$$= \frac{E(N)}{\det(M+N)} + \frac{E(M)}{\det(M+N)}$$

or comme $M \in (M) = \det(M) I$
 en multipliant par M^{-1} , il vient

$$M^{-1} M \in (M) = M^{-1} \det(M) \quad \left. \begin{array}{l} \text{comme} \\ \det(M) \\ \text{est une} \\ \text{constante.} \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \in(M) = \det(M) M^{-1}$$

$$\text{d'où } (M+N)^{-1} = \frac{\det(N) N^{-1}}{\det(M+N)} + \frac{\det(M) M^{-1}}{\det(M+N)}$$

Partie C : Polynôme de Tchebychev et trace
 des matrices de déterminant 1.

$$6) a) \underline{P_2(x)} = x P_1(x) - P_0(x) \\ = x - 0 = x$$

$$\text{et } \underline{P_3(x)} = x P_2(x) - P_1(x) \\ = x^2 - 1$$

6) b) $\forall m \in \mathbb{N}^*$, on pose HR_m : $\deg(P_m) = m - 1$

• Initialisation : $\deg(P_1) = 0$

$= 1 - 1$ donc HR₀ est vérifiée

et $\deg(P_2) = 1 = 2 - 1$ donc HR₁ est

• Hérité : Soit $m \geq 2$, on suppose HR_m
 et HR_{m-1} vérifiées

$$\deg(P_{m+1}(x)) = \deg(x P_m(x) - P_{m-1}(x))$$

$$= \deg(x(x^{n-1}) - x^{n-2}) \text{ d'après HR}_m.$$

$$= \deg(x^n) = n \quad \text{et HR}_{m-1}$$

$$\text{ainsi } \deg(P_{m+1}(x)) = (m+1) - 1$$

donc HR_{m+1} est vérifiée

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n - 1$

$$7) \quad M \in (M) = \det(M) I \quad \text{d'après la question 4.}$$

$$\Leftrightarrow M(\operatorname{tr}(M)I - M) = \det(M)I$$

$$\Leftrightarrow M \operatorname{tr}(M) - M^2 = \det(M)I$$

$$\Leftrightarrow M^2 = M \operatorname{tr}(M) - \det(M)I$$

comme $\operatorname{tr}(M)$ est une constante.

$$\Leftrightarrow \boxed{M^2 = \operatorname{tr}(M)M - I} \quad \text{comme } \det(M) = 1 \text{ d'après l'énoncé}$$

$$b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose HR}_n : M^n = -a_{n-1}I + a_n M$$

Initialisation : $M^1 = M$

$$\text{d' } -a_0 I + a_1 M = -P_0(\operatorname{tr}(M))I + P_1 \operatorname{tr}(M)M$$

$$= 0I + M = M$$

ainsi $M = -a_0 I + a_1 M$ donc HR₀ est vérifiée.

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on suppose HR_m vérifiée
 $M^{m+1} = M M^m = M (-a_{m-1}I + a_m M)$

d'après HR_m

$$= -a_{m-1}M + a_m M^2$$

$$\text{Or } -a_{m-1}M = -P_{m-1}(t_M(M))M$$

$$= \underline{f' \text{ est met l'hérédité}}$$

Donc HR_{m+1} est bien vérifiée

Conclusion: $M^n = -a_{m-1}I + a_m M$.

7)
c) Ainsi: $\text{tr}(M^n) = \text{tr}(a_m M - a_{m-1}I)$

par linéarité de la trace

$$= a_m \text{tr}(M) - 2a_{m-1}$$

$$= P_m(\text{tr}(M)) \text{tr}(M) - 2P_{m-1}(\text{tr}(M))$$

on $Q_m = \text{tr}(M)P_m - 2P_{m-1}$ constant

8) a) voici le programme demandé :

```
def P(m, x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1, m+1):
        PN1 = x * P1 - P0
        P0 = P1
        P1 = PN1
    return (P0)
```

b) def Puissance(m, M)
 $M ** m = P(m-1, x) \text{ mp-eyes } - P(m, x) * M$
return (M ** m)

Exercice n°3

Partie A : Rang moyen du premier double pile.

5) a) on effectue des lancers jusqu'à l'obtention du premier indépendant de paramètre pile, $N-1$ compte le nombre de lancers.

donc $N-1 \in \mathcal{G}(p)$ i.e :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \underline{P(N-1 = k)} = p \left(\frac{1-p}{1-p} \right)^{k-1} = p q^{k-1}$$

$$1) \quad b) \text{ Ainsi comme } P(N-1 = k) = pq^{k-1}$$

$$P(N = k) = P(N-1 = k-1) = pq^{k-2}$$

avec $N(\mathbb{N}) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$ donc $k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ au premier

comme on peut avoir un pile puis on relance la pièce au quelle cas $N=2$ mais aussi faire indéfiniment face.

et donc $E(N) = E(N+1-1)$ } par linéarité de l'espérance

$$= E(N-1) - E(1) = \frac{1}{p} - 1$$

(comme $N-1 \subset \mathcal{G}(p)$)

et $V(N) = V(N+1-1) = V(N-1)$
(par définition de la variance)

$$= \frac{1-p}{p^2} \quad / \text{ car comme } N-1 \subset \mathcal{G}(p)$$

2) a) Soit $n \geq 2$. les lancers étant indépendants le nombre de lancer n'influence pas la probabilité de faire pile ou face au dernier lancer plus qu'à un autre (expérience strictement similaire).

Donc $P([N=n] \cap S) = P([N=n])P(S)$

$$= pq^{n-2} p = p^2 q^{n-2}$$

(mais aussi comme $P([N=n] | S) = P(S)$)

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 236

Nombre de pages : 88

Session : 2026

Épreuve de : Mathématique Appliquée

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$2) a) (\underline{[N=m] \cap S})$$

$$= [F_1 F_2 \times \dots \times F_{m-2} P_{m-1} P_m]$$

en passant à la probabilité

$$P([N=m] \cap S) = \underline{q^{m-2} p^2}$$

2) b) d'après la formule des probabilités totales
avec le système complet d'événement $[N=k]$

$$\underline{P(S)} = \sum_{k=2}^{+\infty} P([N=k] \cap S) = \sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-2} p^2$$

$$= p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} q^{k'} \quad (\text{on reconnaît une somme géométrique de paramètre } q)$$

$$= p^2 \left(\frac{1}{1-q} \right) = \underline{p}$$

3) a) La première expérience est réussie si $[N=m] \cap S$ et rate si $[N=m] \cap \bar{S}$.

$$\text{Ainsi } P(R=1) = P(N=m \cap S) = q^{m-2} p^2$$

$$\text{mais comme } P(N=m \cap \bar{S}) = q^{m-1} p$$

pour $k \geq 2$

$$\text{on a } P(R=k) = P(N=m \cap \bar{S})^{k-1} P(N=m \cap S)$$

(par indépendance)

$$= \left(q^{m-1} p \right)^{k-1} p^2 q^{m-2}$$

$$= q^{(m-1)(k-1)} p^{2+k-1} q^{m-2}$$

$$= q^{(m-2) + (m-1)(k-1)} p^{2+k-1}$$

3) b)

γ' ordme~~st~~

$$\begin{aligned} 4) a) P(N_i = 0) &= P(R < i) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} P(R = k) \end{aligned}$$

γ' ordme~~st~~

b) γ' ordme~~st~~

c) Sans réserve de convergence

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k p q^{i+k-3}$$

en posant
 $k' = k - 2$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k p q^{i+k-2}$$

$$= q^i p \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$$

$\underbrace{q^i p}_{q^i/p}$

on reconnaît une
 série géométrique
 dérivée d'autre 1
 donc N_i admet une
 espérance et :

$$\begin{aligned} E(N_i) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k P(N_i = k) + P(N_i = 1) \\ &= q^i/p + P(N_i = 1) \end{aligned}$$

↳ admet le résultat de l'énoncé

Sans réserve de convergence

$$\begin{aligned} 5) \quad \sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i) &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} \left(\frac{1+p}{p} \right) \\ &= \frac{1+p}{p} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \end{aligned}$$

(série géométrique de
 paramètre q donc $\Rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i)$ converge

$$\text{et } \sum_{k=1}^{+\infty} E(N_i) = \frac{1+p}{p^2}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 236

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : M. A. E.M. Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$6) \quad m \geq 2.$$

$$a) \quad P(T = k) = P(N_1 + \dots + N_m = k)$$

j'admets.

$$b) \quad \text{donc} \quad P(T = k) = P(N_1 + \dots + N_m = k)$$

$$b) \quad \text{donc} \quad k P(T = k) = k P(N_1 + \dots + N_m = k)$$

donc on somme de $k = 1$ à $k = 2$

$$\sum_{k=1}^m k P(T = k) = \sum_{k=1}^m E(N_i)$$

d'où par positivité des probabilités =

$$\sum_{k=2}^m k P(T=k) \leq \sum_{i=1}^m E(N_i) \quad \text{comme}$$

$$P(T=1) \geq 0.$$

$$c) \text{ or } 0 \leq \sum_{k=2}^m k P(T=k) \leq \sum_{i=1}^m E(N_i)$$

mais $\sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i)$ converge donc

en faisant tendre m vers $+\infty$ par

'encastrement' T est bien une espérance

comme $\sum k P(T=k)$

converge et $P(T=1)$ est un réel dans $[0, 1]$.

7) je n'ai rien pu

(voir suite)

(vain smile)

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B : Simulation informatique :

```
8) def Exp-1(p):  
    N = 1  
    while rd.random() > p :  
        N = N + 1  
    if rd.random() > p  
        S = 0  
    else :  
        S = 1  
    return N + 1, S
```

```
9) S = 0  
    T = 0  
    R = 0  
    while S = 0 :  
        R = R + 1  
        E = Exp-1(p)  
        if rd.random() < p S = 1, else S = 0  
    T =  
    return (R, T)
```

10) a)

def Freq-T(m, p):

if on'aboutis pas

10) b) En prenant $m = 4$ et $p = 1/2$
 on aura { d'après l'équation
 fréquentielle } 2 pile. En 4 lancers
 c'est à dire $P(F_1 F_2 P_3 P_4) = \frac{1}{2}^4 = 0.125$
 ce qui est cohérent comme $0.125 \sim 0.123$

Partie C : Nombre de piles

$$11) \quad \underline{P(\gamma_m = 1) = P(P_m P_{m+1}) = P(P_m) P(P_{m+1})}$$

par indépendance $= p p = \underline{p^2}$

$$\text{et } \underline{P(\gamma_m = 0) = 1 - P(\gamma_m = 1) = 1 - p^2}$$

on on remarque $\gamma_m \hookrightarrow B(p^2)$

$$\text{donc par définition } \underline{E(\gamma_m) = P(\gamma_m = 1) = p^2}$$

$$\text{et } \underline{V(\gamma_m) = p^2 (1 - p^2)}$$

$$12) \quad P([\gamma_m = 1] \cap [\gamma_{m+1} = 1]) =$$

$$P(P P_{m+1} \cap P_{m+1} P_{m+2}) = P(P_m P_{m+1} P_{m+2})$$
$$= p^3$$

$$\text{on } P(\gamma_m = 1) P(\gamma_{m+1} = 1) = p^2 \times p^2 = p^4$$

donc γ_m et γ_{m+1} ne sont pas indépendants

$$\text{mais } P([\gamma_m = 1] \cap [\gamma_m = 1])$$

$$= P(P_m P_{m+1} \cap P_m P_{m+1}) = P(P_m P_{m+1} P_m P_{m+1})$$

$$= P(P_m) P(P_{m+1}) P(P_m) P(P_{m+1}) = p^4$$

$$= P([\gamma_m = 1]) P(\gamma_m = 1) \text{ de même pour}$$

$$\text{les autres éléments de } (\gamma_m; \gamma_m) (n)^2$$

Ainsi X_m et X_n sont indépendantes -

b) X_m et X_n sont indépendantes donc

$$\underline{E_{ar}(X_m, X_n) = 0}$$

$$\text{et } \underline{E_{ar}(X_{m+1}, X_m) = E(X_m X_{m+1}) - E(X_m)E(X_{m+1})}$$

d'après König Huygens

$$= \sum_{y \in X_m(\Omega)} \sum_{x \in X_{m+1}(\Omega)} yx \cdot P([X_m = y] \cap [X_{m+1} = x]) - p^4(1-p^2)^2$$

$$= P([X_m = 1] \cap [X_{m+1} = 1]) - p^4(1-p^2)^2$$

comme pour les autres possibilités
de la somme on aura en géra
on factorise

$$= p^3 - p^4(1-p^2)^2$$

$$= \underline{p^3(1-p)(1-p^2)^2}$$

$$13) a) E(S_m) = E\left(\sum_{k=1}^m X_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^m E(X_k) \text{ par linéarité de l'espérance}$$

$$= \sum_{k=1}^m E(X_m) \text{ comme les } X_k (k \in \mathbb{N}^*) \text{ ont la même espérance}$$

$$= \sum_{k=1}^m p^2(1-p^2) = \underline{mp^2(1-p^2)}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 38

Session : 2026

Épreuve de : Maths appli EM Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}
 \text{et } \underline{V(S_m)} &= V\left(\sum_{k=1}^m X_k\right) = \\
 &= \sum_{k=1}^m V(X_k) - \underbrace{\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \sum_{i \neq k}^m \text{Cor}(X_i, X_k) \right)}_{\text{nul si } i > k+2} \\
 &= \underline{m p^2 (1-p^2) + 2(m-1) p^3 (1-p)} \quad \text{y'asmet}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) et donc } V\left(\frac{S_m}{m}\right) &= \frac{1}{m^2} V(S_m) \quad \text{La variance étant quadratique.} \\
 &= p^2 (1-p^2) + 2 \frac{(m-1)}{m^2} p^3 (1-p) \\
 &= p^2 \left((1-p^2) + 2 \frac{(m-1)}{m^2} p (1-p) \right) \leq \frac{3p^2}{m} \\
 &\underline{\text{(y'asmet)}}
 \end{aligned}$$

14) D'après Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\left|\frac{S_m}{m} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_m}{m}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{\frac{3p^2}{m}}{\varepsilon^2} = 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{m}$$

$$\text{Or } \lim_{m \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{m} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_m}{m} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

FIN

