

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

VO-00092
811831
Mat Appli



Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées ENS HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice n° 1.

1) def suite $u(a, n)$:
 $u = a$
 for k in range $(1, n+1)$:
 $u = u * u - u + 1$
 return u .

2) Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors d'après le théorème de la limite monotone $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe

$$\text{Considérons : } x = x^2 - x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

or $\Delta = 0$ donc la racine est double
en particulier $1^2 - 2 + 1 = 0$

1/51

Ainsi, d'après le théorème du point fixe si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors sa limite est un point fixe, n'admettant qu'un unique point fixe il vient $C=1$ (si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) on suppose.

$$3) a) u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n \\ = u_n^2 - 2u_n + 1$$

$$\text{Soit } f: x \mapsto x^2 - 2x + 1$$

f est $\in \mathbb{C}^1$ comme polynôme sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 2$$

$$\text{d'au: } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x \geq 1$$

Ainsi f est croissante sur $]1, +\infty[$

On a $a > 1$ donc on a bien

$u_{n+1} - u_n > 0$ i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

3) b) On a $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante on $u_0 = a$ donc d'après ci-dessus

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n \geq a} \quad \left. \vphantom{\boxed{u_n \geq a}} \right\} \text{ avec égalité pour } n=0$$

3)
c) Raisonnons par l'absurde et supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente d'après la question 2 elle converge alors vers 1

Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (3.a)

et $u_n \geq a$ (pour tout n élément de $\mathbb{N}$ d'après 3.b)

mais $a > 1$ (énoncé)

$$\text{donc } u_n \geq a > 1$$

ainsi la proposition $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absurde comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger de plus elle est croissante et non majorée (son seul point fixe étant 1) d'après le théorème de la limite monotone $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge}}$ et étant croissante

l'ayant d'après le théorème de la limite monotone

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}.$$

4) On a montré $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant un unique point fixe (1)

donc $u_{n+1} \neq u_n$ est absurde

A) On a : $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$
avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n^2 - U_n + 1}{U_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{U_n^2}{U_n^2} - \frac{U_n}{U_n^2} + \frac{1}{U_n^2} \right)$$

$= 1$ par croissance comparée - ~ 0 quand $n \rightarrow +\infty$

Ainsi : $U_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} U_n^2$

(ces autres propositions étant absurde par croissance de la suite pour ③ et ④ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n^2 - U_n + 1}{U_n} = +\infty \neq 1$ pour ① par croissance comparée)

5) a) On a montré en 3-b) :

$$\forall m \in \mathbb{N}, U_m \geq a \text{ or } a > 1$$

d'où pour tout m élément de $\mathbb{N}$, $U_m \geq a > 1$

donc $U_m - 1 > 0$ et par croissance de $(U_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (3) a) il vient aussi :

$$U_{m+1} - 1 > 0$$

donc $\frac{1}{U_m - 1} - \frac{1}{U_{m+1} - 1}$ existe (pour tout m entier élément de $\mathbb{N}$)

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 40

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}
 & \forall m \in \mathbb{N} \\
 & \text{et } \forall 1 \leq n \leq m \\
 & \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n^2 - u_n} \\
 & = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n(u_{n-1})} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_n} \\
 & = \frac{1}{u_n} \\
 & \text{comme } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}, \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

5) b) et donc en sommant l'égalité obtenue de $k=1$ à $k=m$ il vient :

$$\begin{aligned}
 & \forall m \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_{k+1}-1} \right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{u_k} \\
 & \text{par télescopage} \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{m+1}-1} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{u_k}
 \end{aligned}$$

comme $u_0 = a$

c) Soit $N \geq 1$

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{N+1}-1}$$

d'après ce qui précède

$$\text{Or } \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{N+1} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a-1} - \underbrace{\frac{1}{u_{N+1}-1}}_{\substack{0 \text{ quand} \\ N \rightarrow +\infty}} \right) = \frac{1}{a-1}$$

Ainsi la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge

$$\text{et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$$

On suppose pour la suite $a = 2$.

$$6) a) \forall m \in \mathbb{N}, u_m \geq a > 1$$

donc $\frac{1}{u_m} \in]0, 1[$ est bien définie
pour tout $m \in \mathbb{N}$.

et d'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} \text{ car } a=2$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$$

Ainsi on définit bien la loi d'une variable

aléatoire X telle que $X(\omega) = N$ / variable
pour tout ω élément de Ω comme $\sum P(X=x) = 1$
et $x \in X(\Omega) \Rightarrow P(X=x) \in]0, 1[$ $x \in X(\Omega)$
on pose : $\forall m \in \mathbb{N}, P(X=m) = \frac{1}{u_m}$.

pour $m \geq 2$ où m est un entier naturel

b) On a :

$$2^m(2^m - 1) \geq 2(2^m - 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{comme pour} \\ m \geq 2 \\ 2^m \geq 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{donc } 2^m(2^m - 1) + 1 \geq 2(2^m - 1)$$

$$\text{donc } 2^m(2^m - 1) + 1 \geq 2^{m+1}$$

Résonance par récurrence

6) c)

$\forall m \geq 2$, on pose HR_m: $U_m \geq 2^m$

• Initialisation $U_1 = 4 - 2 + 1 = 3$

donc $U_2 = 9 - 3 + 1 = 7$

on $U_2 = 7 \geq 2^2 = 4$

donc HR₀ est vérifié

• Hérité: Soit $m \geq 2$, on suppose HR_m vérifié

$U_m \geq 2^m$ d'après HR_m pour $m \geq 2$

En appliquant $\phi: x \mapsto x^2 - x + 1$
il vient (car ϕ est strictement sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\phi(U_m) &= U_m^2 - U_m + 1 \geq (2^m)^2 - 2^m + 1 \\ &= 2^m(2^m - 1) + 1 \geq 2^{m+1}\end{aligned}$$

d'après la question précédente

d'où $\phi(U_m) = U_{m+1} \geq 2^{m+1}$

donc HR_{m+1} est vérifié.

Conclusion: pour tout n entier naturel supérieur
ou égale à 2 on a l'égalité:
 $U_n \geq 2^n$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

En particulier $U_0 = 2 \geq 2^0 = 1$

et $U_1 = 4 - 2 + 1 = 3 \geq 2^1 = 2$

Ainsi cette dernière égalité reste bien valable pour $n=0$ et $n=1$

pour $n \in \mathbb{N}$

d) On a : $\forall n, U_n \geq 2^n \geq 0$

donc $0 \leq \frac{1}{U_n} \leq \frac{1}{2^n}$ par décroissance de la fonction inverse, c'est-à-dire comme $U_n > 0$ et $2^n > 0$ sans risque de convergence pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{mais } \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2^k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = 2$$

converge comme série géométrique dérivée avec $|1/2| < 1$

d'autre 1. Donc par comparaison de séries à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{U_k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X=k) \text{ converge i.e. } X \text{ admet une espérance}$$

9/53

de même : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ converge comme série géométrique d'ordre 2 et 1 (respectivement) et de paramètre $|\frac{1}{2}| < 1$
 donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(\frac{1}{2^k}\right)$ converge donc X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

Exercice n° 2.

1) a) On est ici face à un problème de Cauchy qui d'après le cours possède une seule (belle) solution.

1) b) On a $f'(x) = f(x) - 2g(x)$

où f et g sont dérivables donc
 $f(x) - 2g(x) = f'(x)$ ^{sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé}

est dérivable sur $\mathbb{R}$ i.e f
est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

de même $g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$

où $2f(x) + 5g(x)$ est bien
 dérivable comme f et g sont dérivables
 sur $\mathbb{R}$.

ainsi $g'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
i.e g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ |

2) a) En dérivant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) - 2g(x)$
 en dérivant (c'est comme f est deux
 fois dérivable d'après ce dessus) il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f'(x) - 2g'(x)$$

en substituant par $g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$

il vient: $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f'(x) - 2(f(x) + 5g(x))$

on $f'(x) = f(x) - 2g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f(x))$

d'où en remplaçant l'expression de g par celle obtenue.

$$f''(x) = f'(x) - 2\left(f(x) + \frac{5}{2}(f'(x) - f(x))\right)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = f'(x) - 2f(x) - 5f'(x) + 5f(x)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = 6f'(x) - 7f(x)$$

↓
je n'aboutis pas
au résultat attendu.
erreur d'annonce au 1^{er} calcul.

donc $f''(x) - 6f'(x) + 7f(x) = 0$

$\Rightarrow f$ est solution de l'équation (E):

$$y'' - 6y' + 7y = 0$$

2) b) On définit f tels que $f(0) = 1$
donc en dérivant cette constante il vient

$$f'(0) = 0$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages :

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées EDS HEC.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2) c) Considérons $x^2 - 6x + 9 = 0$

On a : $\Delta = 36 - 36 = 0$ donc l'équation admet une racine réelle

On a en particulier $x = 3$ qui est donc la solution

donc les solutions sont de la forme

$$\{(\lambda + t\mu) e^{3t} / (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2\}$$

avec les conditions initiales

$b(0) = 1$ et $b'(0) = 0$ il vient le système :

$$\begin{cases} (\lambda + 0\mu) e^{3(0)} = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -1 \end{cases}$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, b : x \mapsto (1 - t) e^{3t}$

2) d) en remplaçant par l'expression obtenue,

comme $b'(t) = -e^{3t} + 3(1-t)e^{3t}$ il vient

$$\begin{aligned} 2g(t) &= b(x) - b'(x) = (1-t)e^{3t} + e^{3t} - 3(1-t)e^{3t} \\ &= -2(1-t)e^{3t} + e^{3t} \\ &= e^{3t}(2t-1) \end{aligned}$$

et donc finalement il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g: x \mapsto \frac{1}{2} e^{3t}(2t-1)$$

mb: ce résultat est surprenant parce qu'il est différent de ce qui nous -

$$\begin{aligned} 3) a) \quad \forall x \in \mathbb{R}: \\ (S) = \begin{cases} b'(x) = b(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2b(x) + 5g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L2 \rightarrow \\ L2 + L1 \end{aligned} \quad \begin{cases} b'(x) = b(x) - 2g(x) \\ b'(x) + g'(x) = 3b(x) + 3g(x) \end{cases}$$

On $h = b + g$ donc $h' = b' + g'$
d'où en factorisant par 3 à droite

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} b'(x) = b(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$$

pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

AB2

$$b) \underline{h(0)} = b(0) + g(0) = 1 + 1 = \underline{2}$$

$$\text{et } h' = 3h \Leftrightarrow h' - 3h = 0$$

où les solutions sont de la forme

$$\{ \lambda e^{3t} / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Avec la condition initiale $h(0) = 2$
il vient : $\lambda e^{3(0)} = 2 \Rightarrow \lambda = 2$

$$\text{d'où } \underline{h : x \mapsto 2e^{3x}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{pour tout } x \\ \text{éléments de} \\ \mathbb{R} \end{array} \right)$$

c) Ainsi, il vient $h(x) = (b+g)(x) = 2e^{3x}$
par définition des opérations sur les fonctions.

$$\text{d'où : } (S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} b'(x) = b(x) - 2g(x) \\ (b+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b'(x) = b(x) + 2b(x) - \underline{2b(x) - 2g(x)} \\ (b+g)(x) = 2e^{3x} \quad \quad \quad - 2b(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b'(x) = 3b(x) - 4e^{3x} \\ (b+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

4) f_α est C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations sur

a) les fonctions usuelles et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'_\alpha(x) = 3xx^3e^{3x} + \alpha e^{3x} \\ = x^3e^{3x}(3x + 1)$$

$$\text{donc } f'_\alpha(x) = 3f(x) - 4e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha x^3 - 3x\alpha x^3 + \alpha x^3 = -4e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^3 = -4e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -4 \quad (\text{unique solution})$$

ne pas prendre en compte

4) b) Ainsi comme on doit avoir

$$f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x}$$

pour f i.e f est solution de (ED)
on en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, f: x \mapsto -4x^3e^{3x}$

$$c) \text{ mais } (f+g)(x) = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow \underline{g(x) = 2e^{3x} - 4x^3e^{3x} = -2e^{3x}}$$

16pts

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4)h) Considérons l'équation homogène :

$$y' - 3y = 0$$

les solutions sont de la forme

$$S_0 : \{ \lambda e^{3x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

avec la condition initiale $b(0) = 1$

il vient $b_0 : x \mapsto e^{3x}$

et donc par principe de superposition il

$$\text{vient } \underline{b(x) = b_0(x) + b_\alpha(x)}$$

$$= e^{3x} - 4xe^{3x}$$

$$= \underline{e^{3x} (1 - 4x)}$$

$$4) c) \quad O_n (f+g)(x) = 2e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) + g(x) = 2e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2e^{3x} - e^{3x}(1-4x)$$

$$\Leftrightarrow \underline{g(x) = e^{3x} + 4xe^{3x} = e^{3x}(1+4x)}$$

$$\text{et } \underline{f(x) = e^{3x}(1-4x)}$$

d'après 4.b)

$$5) a) \quad \text{def } f(x) : \\ \text{return } \text{np.exp}(3*x) * (1 - 4*x)$$

$$\text{def } g(x) \\ \text{return } \text{np.exp}(3*x) * (1 + 4*x)$$

$$5) b) \quad \begin{aligned} f_0 &= \text{np.exp}(3*x) * (1 - 4*x) \\ g_0 &= \text{np.exp}(3*x) * (1 + 4*x) \\ \text{np.linspace}(g_0, f_0) \end{aligned}$$

Exercice n° 3.

1) a)

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

1) b) $E(X) = \frac{\theta}{2}$

$V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

d'après le
cours.

2) a) $F_m(x) = P\left(\bigcap_{k=1}^m [X_k \leq x]\right)$

$= \prod_{k=1}^m P(X_k \leq x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car les } X_k \{k \in [1, m]\} \\ \text{sont} \\ \text{indépendants} \end{array} \right.$

$= \prod_{k=1}^m P(X \leq x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{les } X_k \text{ étant de même} \\ \text{lois que } X \end{array} \right.$

$= \prod_{k=1}^m F(x) = F(x)^m = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^m & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$

b) On a bien $F_m \in C^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_m(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_m(x) = 0$$

Ainsi X_m est bien une densité variable
déterminée à densité et

$$f_m(x) = F'_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ m \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

est une densité de X_m .

$$3) a) P(\theta U \leq x) = P(U \leq \frac{x}{\theta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

en rappelant $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Ainsi + comme $P(\theta U \leq x)$ correspond en tout point à la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \theta]$ on a bien montré que si $U \subset \mathcal{U}[0, 1]$ alors $\theta U \subset \mathcal{U}[0, \theta]$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques Appliquées ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

3) b) -

```
def ran_theta(n):
    X = rd.ranlom()
    Y = (theta * X) ** n
    return Y
```

4) a) X_n est à valeurs sur un segment et sa densité n'est pas impaire sur ce segment donc X_n est met une expérience et

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| b_x(x) dx = \int_{-\infty}^0 |x| b_x(x) dx + \int_0^{+\infty} |x| b_x(x) dx$$

$$= \int_0^{\theta} |x| b_x(x) dx + \int_{\theta}^{+\infty} |x| b_x(x) dx$$

comme X_n est à valeurs dans $[0, \theta]$

$$= \int_0^{\theta} |x| m \left(\frac{x}{\theta} \right)^{m-1} dx = \theta \int_0^1 m \left(\frac{x}{\theta} \right)^{m-1} dx$$

$$= m\theta \left[\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{m+1}}{m+1} \right]_0^\theta = \frac{m\theta}{m+1}$$

de même, soit $A > \theta$

$$\int_{-A}^A x^2 f_{X_m}(x) dx = \int_{-A}^0 x^2 f_{X_m}(x) dx + \int_0^\theta x^2 f_{X_m}(x) dx$$

$$+ \int_\theta^A x^2 f_{X_m}(x) dx = \underbrace{\int_0^\theta x^2 f_{X_m}(x) dx}$$

intégrale sur un réel positif non
impropre donc convergente,
donc X admet un moment d'ordre 2 et

$$E(X^2) = \int_0^\theta x^2 m \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m-1} dx = m\theta^2 \int_0^\theta \left(\frac{x}{\theta}\right)^{m+2} dx$$

$$= \left[m\theta^2 \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{m+2}}{m+2} \right]_0^\theta = \frac{m\theta^2}{m+2}$$

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 donc
une variance.

et par Koenig-Hungens :

$$\boxed{V(X)} = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n\theta^2)(n+1)^2 - n^2\theta^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n^2 + 2n + 1)n\theta^2 - n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2 - n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

5) Z_n est représentatif d'un échantillon
des $X_i (i \in \pi_{1,n})$ ~~qui sont repr~~
à travers $Z_n = \text{moy} (X_i (i \in \pi_{1,n}))$
sans dépendre de θ
donc Z_n est un estimateur de θ

$$\begin{aligned} \text{et } E(Z_n) &= E\left(\frac{n+1}{n} Z_n\right) \\ &= \frac{n+1}{n} E(Z_n) \text{ par linéarité} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(\frac{n\theta}{(n+1)} \right) = \theta \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{on simplifiant} \\ \text{ce produit} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V(Z_n) &= V\left(\frac{n+1}{n} Z_n\right) \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Z_n) \text{ la variance étant} \\ &\quad \text{quadratique} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \right) \text{ d'après 4.b) } \\ &= \frac{\theta^2}{n(n+2)} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages 30

Session : 2026

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) a) On sait que $\theta \in [5, 7]$

pour $n = 46$ on a :

$$\frac{\theta^2}{46+2} = \frac{\theta^2}{48} \leq \frac{49}{48} < 1$$

comme $7 \times 7 = 49$ -

mais pour $n = 47$

$$\frac{\theta^2}{47+2} = \frac{\theta^2}{49} \leq 1$$

comme la fonction inverse est décroissante on a bien

$$\forall n \geq 47, \frac{\theta^2}{n+2} \leq 1$$

6) b) d'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{\varepsilon^2 n(n+2)}$$

$$= \mathbb{P}(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{\varepsilon^2 n(n+2)}$$

or pour $n \geq 47$ comme $\frac{\theta^2}{n+2} \leq 1$

d'après la question précédente il vient : $\forall \varepsilon > 0$,
pour $n \geq 47$

$$\mathbb{P}(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

c) On réécrit l'inégalité ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|Z_m - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{m\varepsilon^2}$$

pour $m \geq 2000$ il vient

$$P(|Z_m - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{2000\varepsilon^2}$$

mais en prenant $\varepsilon = 1/20$

$$\Leftrightarrow P(|Z_m - \frac{1}{20}| \leq \theta \leq Z_m + \frac{1}{20}) \geq 1 - \frac{100}{2000}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z_m - \frac{1}{20}| \leq \theta \leq Z_m + \frac{1}{20}) \geq 1 - \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow P(|Z_m - \frac{1}{20}| \leq \theta \leq Z_m + \frac{1}{20}) \geq 0.95$$

$$\left| \text{comme } \frac{1}{20} = \frac{5}{100} \Rightarrow 1 - \frac{5}{100} = 0.95 \right|$$

donc on a une majoration pour $\forall m \geq 47$

$\frac{\theta^2}{m+2} \leq 1$ d'où :

$[Z_m - \frac{1}{20}, Z_m + \frac{1}{20}]$ est un intervalle de confiance pour θ avec un niveau de confiance au moins égale à 0.95.

7) On définit une fonction d'entête
 θ .
on initialise à $c = 0$
et ~~par~~ on crée une boucle de 0 à
1000
On attribue à y une simulation de
 X_{2000} puis on attribue $\frac{2001 \times 2000}{2000}$
à z . et si $|z - \theta| \leq 0.1$
on incrémente c

puis on retourne $(c/1000)$

et on retourne le résultat de la fonction
pour $\theta = 6$ en console

ce qui revient en fait à calculer la
probabilité de $P(Z_n - \frac{1}{10} \leq 6 \leq Z_n + \frac{1}{10})$
par une approche fréquentiste.

le résultat devrait être supérieur à 0.95.

et donc vérifier empiriquement la question
6.c).

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
GR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème -

Partie 1.

$$1) a) \quad J_m = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } J_m^2 = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m & \dots & m \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 1 \\ m & \dots & m \end{pmatrix} = m J_m$$

$$\text{Ainsi } J_m^2 - m J_m = 0$$

d'où $P: x \mapsto x^2 - m x$ est un polynôme annulateur de J_m

1-b) T_m est diagonalisable car
 T_m est symétrique ($T_m^t = T_m$)
 d'après le théorème spectral.

Maintenant raisonnons par l'absurde et
 supposons que T_m admet plus de
 densité valeurs propres.

Mais $\text{Sp}(T_m) \subset \{P(x) = 0 / x \in \mathbb{R}\}$

d'après la question précédente

car P est de degré 2 donc admet
 au plus deux racines. Il est donc

Absurde que T_m admettent plus de densité
 valeurs propres.

Par ailleurs $P(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-m) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = m$.

Or $\text{rg}(J_m) = 1 \neq m$ i.e. J_m est non inversible.

Comme on notant $C_1, \dots, C_m$ ses vecteurs colonnes, il vient

$C_1 = \dots = C_m$
donc 0 est valeur propre de J_m

$$\text{et } J_m - mI_m = \begin{pmatrix} 1-m & & \\ & \ddots & \\ & & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

proposons à un test de compatibilité de ses vecteurs colonnes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-m) + y + z + \dots + t = 0 \\ \vdots \\ x + y + z + \dots + t(1-m) = 0 \end{cases}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(-m) + 0 + 0 + \dots + t m = 0 \\ \vdots \\ x + y + z + \dots + t(1-m) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = t \text{ donc}$$

On remarque toujours en notant $C_1, \dots, C_m$ ses vecteurs colonnes :

$$\sum_{k=1}^m E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } -\sum_{k=1}^{m-1} E_k = E_m$$

donc il existe une combinaison linéaire
~~on~~ pour exprimer $E_m \Rightarrow$ la famille
 n'est donc possible donc

$$\text{rg}(J_m - m I_m) < m$$

i.e. $(J_m - m I_m)$ est non inversible

donc m est valeur propre de J_m

d'où finalement $\text{Sp}(J_m) = \{0, m\}$

c) $J_m X = m X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = m x_1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = m x_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(1-m) + x_2 + \dots + x_m = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + (1-m)x_m = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1 \rightarrow) \\ (1 \rightarrow) \\ \vdots \\ (1 \rightarrow) \\ (1 \rightarrow) \end{matrix} \begin{cases} -m x_1 + 0 + 0 + \dots + m x_m = 0 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + (1-m)x_m = 0 \end{cases}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
GR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Maths ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_m \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + (1-m)x_m = 0 \end{array} \right.$$

en répétant le même algorithme en substituant chaque ligne au fur et à mesure il vient bien...

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_m = x_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} d) \text{ Ainsi } E_m(J_m) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

qui est bien de dimension 1 comme
 $\# \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1$ et cette famille est non nul

Partie 2 : Quelques généralités.

2) a) Ici le degré maximale est bien 2 (atteint par tout les sommets) et on peut se rendre d'un sommet à l'autre en maximum 2 arêtes donc $\Delta = 2$ (i.e. ^{le q^e de} diamètre 2)
 de plus il à 4 sommets il est donc d'ordre 4.
 donc le graphe de l'énoncé est bien un élément de $\mathcal{E}_q(2)$ respectant tout les critères

2) b) G_3 et G_4 ne contiennent pas
 comme G_3 est de diamètre 3 > 2
 et G_4 n'est pas non plus de
 diamètre 2. (chaîne de longueur 4 pour
 aller du sommet ⑤ au sommet ③)
 par contre G_1 et G_2 sont bien des
 graphes d'ordre 5 de diamètre 2 et de
 degré maximale $d = 2$
 donc $(G_1, G_2) \in (E_5(2))^2$

3) a) Le degré maximal d'un graphe
 G élément de $E_n(d)$ est d
 donc si s est le sommet de degré
 d dans G à d voisins (par définition)
 dans le cas contraire il en a moins
 d'en s possède d voisins au maximum.

b) Prenons s fixe.

s a au maximum d voisins qui ont le graphe est complet avec aussi d voisins ainsi il y a au maximum d^2 sommets comme on a d sommets mais $D=2$.
on $d^2 = d + d(d-1)$

il y a donc bien au maximum $d + d(d-1)$ sommets si $G \in E_n(d)$

c) on $d(d-1) + d = d^2$

avec $n \leq d^2$ donc à l'équation

$$n \leq d^2 + 1$$

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3 :

4) a) A est la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté. Elle est par définition symétrique comme $a_{i,j} = a_{j,i}$ représente l'arête entre le sommet i et le sommet j pour tout (i,j) éléments de $\{1, n\}$

5) a) Supposons qu'il y a pour tout (i,j) de $\{1, n\}$ un sommet entre i et j

alors $a_{i,j} = 1$

dans le cas contraire (il n'y a pas de sommet entre i et j)

dans $a_{i,j} = 0$

38/52

$$\text{d'où : } (i, j) \in [1, m]^2, a_{ij} \in \{0, 1\}$$

(comme il ne peut que y avoir ou ne pas avoir d'arête entre le sommet i et le sommet j)

5) b) ici le graphe est simple donc sans boucle donc sans arête entre le sommet i et le sommet i .

donc $a_{ii} = 0$ pour tout i de $[1, m]$

$$6) a) \text{ Soit } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$\text{donc } A^2 = AA = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

d'après le rappel

donc les coefficients de A^2 sont les b_{ij} où $\forall (i, j) \in [1, m]^2$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} a_{kj}$$

} aussi, d'après le rappel.

b) pour tout i de $\llbracket 1, m \rrbracket$

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} a_{i,k} = \sum_{k=1}^m (a_{i,k})^2$$

or $\forall (i,k) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, a_{i,k} \in \{0, 1\}$
d'après la question 5-d)

donc si $a_{i,k} = 1$ alors $(a_{i,k})^2 = 1$
 $= a_{i,k}$

si $a_{i,k} = 0$ alors $(a_{i,k})^2 = 0 = a_{i,k}$

d'où dans les deux cas $(a_{i,k})^2 = a_{i,k}$

et donc finalement :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, b_{i,i} = \sum_{k=1}^m a_{i,k}$$

$$\text{On a } b_{i,i} = \sum_{k=1}^m a_{i,k}$$

= je n'abandonne pas.

7) a) Si $a_{i,j} = 0$ en $i \neq j$ donc

$$\text{alors } b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} a_{j,k}$$

if n is arbitrary pos

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Maths EDS HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7) b) et donc pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$
avec $i \neq j$ on a :

$$a_{i,j} = 0 \text{ et } b_{i,j} = 1$$

$$\text{ou } a_{i,j} = 1 \text{ et } b_{i,j} = 0$$

donc dans les deux cas $a_{i,j} + b_{i,j} = 1 + 0 = 1$

7) c) pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on a établi e
 $a_{i,i} = 0$ en 5-b et $b_{i,i} = d$ en

$$6-b \text{ donc } b_{i,i} + a_{i,i} = d + 0 = d$$

8) Ainsi $A^2 + A = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$
on $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$

$b_{i,j} + a_{i,j} = 1$ donc J_n
avec des 0 sur la diagonale

40/50

mais pour les coefficients diagonaux
 donc pour l'ant $i \in \{1, \dots, m\}^2$
 $b_{i,i} + a_{i,i} = d$.

d'où finalement :

$$A^2 + A = (d-1)I_m + J_m$$

comme les coefficients diagonaux seront $= d$
 et on aura des 1 portant ailleurs tels que :

$$\begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{J_m} + \underbrace{\begin{pmatrix} d-1 & & \\ & \ddots & \\ & & d-1 \end{pmatrix}}_{(d-1)I_m} + \text{en factorisant}$$

Partie 4.

3) A est symétrique étant une matrice
 d'un graphe simple elle est donc
 diagonalisable d'après le théorème
 spectral

$$10) a) \quad \cancel{AU = dU = (A \cancel{dU})}$$

$$\cancel{= \Sigma} \quad \underline{AU} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'après la question 6.b

$$= \underline{dU}$$

10) b) Ainsi d est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ i.e U par définition
comme $AU = dU$

$$11) \quad A^2 + A = (d-1)I_m + J_m \text{ d'après q.8.}$$

$$\Leftrightarrow A^2 + A - (d-1)I_m = J_m$$

$$\Rightarrow Q(A) = J_m \text{ ou } Q: x \mapsto x^2 - x - d + 1$$

donc il vient d'équivalent $(\lambda^2 + \lambda - d + 1)$

valeurs propres de $J_m \Leftrightarrow \lambda$ valeurs propre

de A comme $A^2 + A - (d-1)I_m = J_m$

d'au $T_m X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1) X$

11) b) Si $\lambda = d$ alors

$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1$$

donc $T_m X = (d^2 + 1) X$

donc $T_m X = m X$ comme $m = d^2 + 1$

donc $T_m X - m X = 0$

donc $X \in \text{Vect}(U)$ d'après le système de la partie 1.

or $\dim(\text{Vect}(U)) = 1$

donc $\dim(E_d(A)) = 1$

étant à fonction non nul

c) $m = d^2 + 1$ donc en substituant on par $d^2 + 1$ il vient

$$\lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d - d^2 = 0 \Rightarrow \lambda = d \quad \checkmark$$

Q.E.D.

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Math ED HEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

an d est bien valeur propre de A
je ne trouve pas l'autre solution.
($\lambda = 0 \Rightarrow 1 - d = n?$)

d) Supposons $\lambda \neq d$

je trouve -

1) on considère $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 4(d-1) = 4d - 3 > 0$$

comme $d \geq 1$ comme $D = 2$

ainsi les racines i.e les valeurs propres possible de A comme ce polynôme est de degré 2 :

$$b = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}$$

Partie 5: Confirmation des VP de A .

12) a) Soit A et B semblables il vient par définitions

$$AB = BA \quad \text{donc à l'ordre}$$

$$T_n(AB) = T_n(BA)$$

je n'abandonne pas.

12) b) D'après la question 9 A est diagonalisable donc sa décomposition des sous espaces propres vaut n
 $\dim(E_d(A)) = 1 < n$
donc A doit admettre ^{au moins} une autre sous espace propre et donc au moins une autre valeur propre
or b et c sont des valeurs propres réelles, donc ^{au moins} b ou c sont des valeurs propres
de A étant les seules valeurs propres de A .

13) On a $\Delta A = A \Delta$
donc $\text{Tr}(\Delta A) = \text{Tr}(A \Delta)$
d'après 12. a)

alors $\text{Sp}(A)$ appartient aux coefficients
de Δ d'après 11) b) on
a $\dim(E_d/A) = 1$ donc un
seul coefficient et égale et d'après
12. b) les autres vp de A
sont b ou c donc les
coefficients diagonaux sont égaux à b
ou c .

14) $D = 2$ donc on peut aller
deux nœuds qu'elle autre sommet
on 2 passages d'arête ou si
 $d = 1$ (i.e. même degré sommet
dans il existe ^{est} ^{donc} ~~un~~ sommet

Copie anonyme - n°anonymat : 811831

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 50

Session : 2026

Épreuve de : Maths EDHEC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

tel (comme $n \geq 2$) qu'on
mettra plus de 2 passage d'écriture
à forcer $d \neq 1$

15) a) On a dans

$$\underline{\text{Tr}(\Delta)} = \sum_{k=1}^n \Delta_{k,k} = \underline{a + (n-1)b}$$

comme il y a un seul d et sinon
que des 1.

on obtient que ce résultat est nul.

25) b) il vient dans :

$$d + (m-1) \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{(1-m)(-1 + \sqrt{4d-3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow d + \frac{(1-m)}{2} = \sqrt{4d-3}$$

$$\Leftrightarrow d^2 + d \left(\frac{1-m}{2} \right) = d \sqrt{4d-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(d + 1 - m)}{2} = d \sqrt{4d-3}$$

$\Leftrightarrow$ si m n'est pas

c) il vient en élevant au carré :

$$(d-2)^2 = d^2(4d-3)$$

$$\Leftrightarrow d^2 - 4d + 4 = 4d^3 - 3d^2$$

$$\Leftrightarrow 4d^3 - 4d^2 + 4d + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow d = 1$ absurde

16) Ainsi on ne peut avoir que d et b en valeurs propres de A (cela serait absurde) on pourrait raisonner similairement et montrer qu'on ne peut avoir seulement d et c en valeurs propres

Or on a au moins aussi bon c donc on en déduit à l'avenir:

$$Sp(A) = \{d, b, c\}$$

FIN

Blank lined paper for writing.

5157