

Copie anonyme - n°anonymat : 496795



A5-00107
496795
Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1

a) g est dérivable sur D car le terme à l'intérieur de la fonction logarithme ne s'annule jamais, et par somme de fonctions dérivables sur D .

$$\forall (x,y) \in D, \quad d_1 g(x,y) = 1 + \frac{y}{1+xy} \\ = \frac{1+xy+y}{1+xy}$$

$$d_2 g(x,y) = \frac{x}{1+xy}$$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1+xy+y}{1+xy} \\ \frac{x}{1+xy} \end{pmatrix}$$

b) $(x_0, y_0) \in D$

(x_0, y_0) est un point critique de $g \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1+x_0 y_0 + y_0}{1+x_0 y_0} = 0 \\ \frac{x_0}{1+x_0 y_0} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x_0 y_0 + y_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

g admet donc un unique point critique $(0, -1)$ dans D

c) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur D
 $\forall (x, y) \in D \quad d_{1,1}g(x, y) = -\frac{y^2}{1+xy}$

$$d_{2,1}g(x, y) = \frac{1+xy - yx}{(1+xy)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+xy)^2}$$

$= d_{1,2}g(x, y)$ d'après le théorème de Schwartz

$$d_{2,2}g(x, y) = -\frac{x^2}{1+xy}$$

$$\text{Donc } \nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{1+xy} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{1+xy} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla^2 g(0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ λ est valeur propre de $\nabla^2 g(0, -1) \Leftrightarrow \nabla^2 g(0, -1) - \lambda I$ n'est pas inversible

$$\Leftrightarrow \det(\nabla^2 g(0, -1) - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1-\lambda)(-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

discriminant: $\Delta = 1 + 4 = 5$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ par stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < 1 - \sqrt{5} < -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -1$$

Donc $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$

les 2 valeurs propres de $D^2 f(0, -1)$ sont négatives donc le point critique est un minimum

2) a) $k \in \mathbb{R}$ $(x, y) \in \mathcal{D}$ $x \neq 0$

$$g(x, y) = k \Leftrightarrow x + \ln(1 + xy) = k$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + xy) = k - x$$

$$\Leftrightarrow 1 + xy = e^{k-x} \quad \text{par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow xy = e^{k-x} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{k-x} - 1}{x} \quad \text{car } x \neq 0$$

$$b) M = \left[(np \cdot \exp(k-x) - 1) / x \text{ pour } x \text{ in } X \right]$$

la ligne de niveau k apparaît sur le graphique pour $k = -0,4 + \frac{1}{5} = -0,2$
 $k = -0,4 + \frac{2}{5} = 0$ $k = -0,4 + \frac{3}{5} = 0,2$

$$k = -0,4 + \frac{4}{5} = 0,4 \quad k = -0,4 + \frac{5}{5} = 0,6 \quad k = -0,4 + \frac{6}{5} = 0,8$$

$$\text{et } k = -0,4 + \frac{7}{5} = 1 \quad \text{et } k = -0,4 + \frac{8}{5} = 1,2$$

$$3) x \in \mathbb{R}^* \quad e^{-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 1$$

$\Rightarrow -x \geq 0$ par stricte croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}^{*+}$

$$\Rightarrow x \leq 0$$

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	$ $	$-$	

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \underline{g(x) > 0}$$

$$4) x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{e^{-x}}{x} \times \left(1 - \frac{1}{e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{1}{xe^x} \times (1 - e^x)$$

D'après le développement limité de la fonction exponentielle en 0 à l'ordre 1:

$$e^x = 1 + x + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = 1 - x + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$ g admet un prolongement continu en 0

$$5) \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{e^{-x} - 1}{x^2}$$

D'après le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction exponentielle:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)_{x \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow e^{-x} - 2 = -1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)_{x \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x} - 2}{x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(x^2)_{x \rightarrow 0}$$

Donc $\frac{e^{-x} - 2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $g'(0) = \frac{1}{2}$

Copie anonyme - n°anonymat : 496795

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

a) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par somme et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g'(x) &= \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x} + 1}{x^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}\end{aligned}$$

$$b) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad -e^{-x} < 0 \quad \text{et } x^2 > 0 \quad \text{et } x+1 > 0$$

$(\Rightarrow x > -1)$

Donc par produits de termes strictement positifs, $g'(x) > 0$

$$\text{et } \underline{g'(0) = \frac{1}{2} > 0}$$

$$c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{xe^x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \text{ par produit } 1 \times$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ par quotient}$$

$$\text{Donc par somme } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \text{ par produit}$$

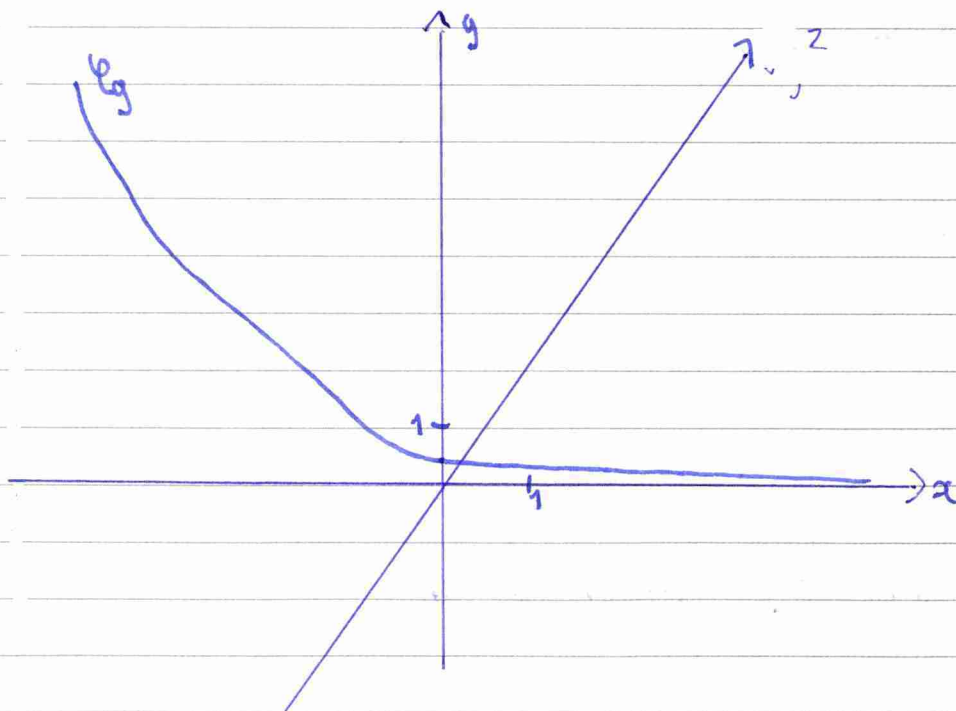
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^x} = 0 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \text{ par quotient}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ par somme}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$		0

7) a)



8) G est bien définie car g est continue sur $\mathbb{R}$ (avec le prolongement par continuité)

$\forall x \in \mathbb{R}, \underline{G(x) = g(x)}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse

9) $x \in \mathbb{R}^{++}$ $G(x) = \int_0^x g(t) dt$

$$= \int_0^1 g(t) dt + \int_1^x g(t) dt \quad \text{Relation de Chasles}$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} dt \quad \text{car } \int_0^1 g(t) dt = 1 \times G(1) - 0 \times G(0)$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{linéarité de l'intégrale}$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - (P_n(t))_1^x$$

$$= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - P_n(x)$$

10)

11) $x > 0$ on admet (6)

x voisin de 0

$$G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x) - G(1) + \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -G(x) + G(1) - \ln(x)$$

D'après le développement limité de la fonction logarithme au voisinage de 0 à l'ordre 1:

$$\ln(x) = -x + o(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\text{Or } G(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$$

$$\text{Donc } \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = x + o(x) + G(1) - \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(x) + G(1) + x + o(x)$$

Exercice 2

1) Soit M_1 telle que $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

Soit M_2 telle que $M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda M_1 + M_2) &= \text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix} \\ &= \lambda a + a' + \lambda d + d' \\ &= \lambda(a+d) + a' + d' \end{aligned}$$

$$\text{Et } \lambda \text{Tr}(M_1) + \text{Tr}(M_2) = \lambda(a+d) + a' + d' = \text{Tr}(\lambda M_1 + M_2)$$

Donc Tr est stable par combinaisons linéaires

$$\text{De plus, } \text{Tr}(O_2) = 0 + 0 = 0$$

Donc l'application Tr est linéaire

Copie anonyme - n°anonymat : 496795

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

2a) Soit M_1 telle que $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Soit M_2 telle que $M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\lambda M_1 + M_2) &= \text{tr}(\lambda M_1 + M_2) I - (\lambda M_1 + M_2) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(a+d) + a' + d' & 0 \\ 0 & \lambda(a+d) + a' + d' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda d + d' & -\lambda b - b' \\ -\lambda c - c' & \lambda a + a' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \mathcal{Y}(M_1) + \mathcal{Y}(M_2) &= \lambda \left(\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} a'+d' & 0 \\ 0 & a'+d' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda d & -\lambda b \\ -\lambda c & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d' & -b' \\ c' & a' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda d + d' & -\lambda b - b' \\ -\lambda c - c' & \lambda a + a' \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Y}(\lambda M_1 + M_2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}(0) = 0 \times I_2 - 0_2 = 0$$

L'application $\mathcal{Y}$ est linéaire et a pour ensemble de départ et d'arrivée $M_2(\mathbb{R})$
donc c'est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \quad \mathcal{Y}(I) &= \text{tr}(I)I - I \\ &= 2 \times I - I \\ &= I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tr}(\mathcal{Y}(M)) &= \text{tr}(\text{tr}(M)I - M) \\ &= \text{tr}(\text{tr}(M)I) - \text{tr}(M) \quad \text{car tr est linéaire} \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - (a+d) \\ &= 2(a+d) - (a+d) \\ &= a+d \\ &= \text{Tr}(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ a) } \quad \mathcal{Y}(E_1) &= \text{Tr}(E_1)I - E_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(E_2) &= \text{Tr}(E_2)I - E_2 \\ &= -E_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(E_3) &= \text{Tr}(E_3)I - E_3 \\ &= -E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(E_4) &= \text{Tr}(E_4)I - E_4 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \end{aligned}$$

$$A = \text{Mat}_B(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{matrix}$$

$y(E_1) \quad y(E_2) \quad y(E_3) \quad y(E_4)$

$$b) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$A^2 = I_4$ donc A est inversible et son inverse est elle-même

c) Un polynôme annulateur de A est $P(A) = A^2 - I$
 $x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$

$$\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$$

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a & +d = 0 \\ -2b & = 0 \\ -2c & = 0 \\ a & -d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ b = c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Vecteur non nul donc il est vecteur propre
 c'est bien un vecteur non nul donc il est libre
 Il est aussi générateur de $E_1(A)$
 Donc c'est bien une base

$$AX = -X \Leftrightarrow (A+I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & +d = 0 \\ a & +d = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -d$$

$$E_{-1}(A) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

C'est un vecteur non nul donc il peut bien être vecteur propre

C'est un vecteur non nul donc c'est une famille liée

De plus, il est générateur de $E_{-1}(A)$

Donc c'est bien une base de $E_{-1}(A)$

$$\begin{aligned} 4) \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad g(M) &= \text{tr}(M)I - M \\ &= \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Mg(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+da \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(M)I &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= Mg(M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad M \in M_2(\mathbb{R}) \quad Mg(M) &= \det(M)I \\ \Rightarrow \frac{Mg(M)}{\det(M)} &= I \quad \text{possible que si } \det(M) \neq 0 \\ \Rightarrow M \times \frac{g(M)}{\det(M)} &= I \end{aligned}$$

Donc M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} g(M)$

Copie anonyme - n°anonymat : 496795

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 29

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D) Soient M et N deux matrices inversibles de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $M+N$ soit inversible

$$\begin{aligned}(M+N)^{-1} &= \frac{1}{\det(M+N)} g(M+N) \\&= \frac{1}{\det(M+N)} (g(M) + g(N)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\&= \frac{g(M)}{\det(M+N)} + \frac{g(N)}{\det(M+N)}\end{aligned}$$

$$\text{or } M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} g(M) \text{ et } N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} g(N) \text{ car elles sont inversibles}$$

$$\Leftrightarrow \det(M) M^{-1} = g(M) \quad \text{et} \quad \Leftrightarrow \det(N) N^{-1} = g(N)$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } (M+N)^{-1} &= \frac{\det(M) M^{-1}}{\det(M+N)} + \frac{\det(N) N^{-1}}{\det(M+N)} \\&= \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{②) } \forall x \in \mathbb{R}, P_2(x) &= x P_1(x) - P_0(x) \\&= x \times 1 - 0 \\&= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_3(x) &= x P_2(x) - P_1(x) \\&= x \times x - 1 \\&= x^2 - 1 \\&= \underline{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n: \deg(P_n) = n-1$

Initialisation: $n=1$ $\det(P_1) = 0 \vee 1-1=0$ P_1 est vraie

Hérédité: Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Il nous faut alors cette hypothèse de récurrence que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $\deg(P_{n+1}) = n$ et $n+1 \in \mathbb{N}^*$

$$\deg(P_n) = n-1 \quad \deg(P_{n-1}) = n-2$$

$$\deg(xP_n(x)) = \deg(P_n) + 1 = n$$

Conclusion: Par récurrence double, nous admettons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\deg(P_n) = n-1$

2a) $M \in M_2(\mathbb{R})$ avec $\det(M) = 1$

D'après la q. 4) : $M^{-1}(M) = \det(M)I$

$$\Rightarrow M(\operatorname{tr}(M)I - M) = \det(M)I$$

$$\Rightarrow M \operatorname{tr}(M)I - M^2 = \det(M)I$$

$$\Rightarrow M^2 = M \operatorname{tr}(M)I - \det(M)I = M \operatorname{tr}(M)I - \det(M)I$$

$$\Rightarrow M^2 = \operatorname{tr}(M)MI - I \text{ car } \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ et } \det(M) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{M^2 = \operatorname{tr}(M)MI - I}$$

$$\begin{aligned}
 M \operatorname{tr}(M) &= \det(M) I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2+ad-a-d & ba+bd \\ ca+cd & da+d^2-a-d \end{pmatrix} \\
 &=
 \end{aligned}$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n): "M^n = -a_{n-1}I + a_n M"$

$$\begin{aligned}
 \text{Initialisation: } n=1 \quad M^1 &= M \quad -a_0 I + a_1 M = -P_0(\operatorname{tr}(M)) + P_1(\operatorname{tr}(M)) \\
 &= -0 + M \quad \text{car } \det(M)=1 \\
 &= M
 \end{aligned}$$

P_1 est vraie

Hérédité: Supposons P vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons sous cette hypothèse de récurrence que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$M^{n+1} = -a_n I + a_{n+1} M$$

$$\begin{aligned}
 M^{n+1} &= M^n \times M \\
 &= (-a_{n-1}I + a_n M) M \\
 &= -a_{n-1}M + a_n M^2 \\
 &= -P_{n-1}(\operatorname{tr}(M)) + P_n(\operatorname{tr}(M^2)) \\
 &= -P_{n+1}(\operatorname{tr}(M)) + P_n(\operatorname{tr}(\operatorname{tr}(M)M - I))
 \end{aligned}$$

on admet l'hérédité

Conclusion: la propriété est initialisée au rang $n=1$ et est héréditaire à partir de ce rang donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(M^n) &= \text{tr}(-a_{n-1}I + a_n M) \\
 &= -\text{Tr}(a_{n-1}I) + \text{Tr}(a_n M) \text{ car Tr est linéaire} \\
 &= -\text{Tr}(p_{n-1}(\text{tr}(M))I) + \text{Tr}(p_n(\text{tr}(M))M) \\
 &= -\text{Tr}(p_{n-1}(\text{tr}(M))) - 2 + \text{Tr}(p_n(\text{tr}(M)) + \text{Tr}(M)) \text{ car } \text{Tr}(I) = 2
 \end{aligned}$$

```

def P(n, x):
    P0 = 0
    P1 = 1
    for k in range(1, n+1):
        U = P1
        V = P0
        P0 = x * U - V
        P1 = U
    return P0

```

```

b) def Puissance(n, M):
    tr = M[0,0] + M[1,1]

    L = np.dot(I, -P(n-1, tr))
    M = L + np.dot(M, P(n, tr))
    return M

```

```

def Puissance(n, M):
    tr = M[0,0] + M[1,1]
    L = np.dot(np.eye(2) - P(n-1, tr))
    M = L + np.dot(M, P(n, tr))
    return M

```

Copie anonyme - n°anonymat : 496795

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 3

a) On a la répétition d'expérience de Bernoulli identiques et indépendantes de succès "obtenir pile" de probabilité p . On compte le nombre de succès $N-1$ $\Rightarrow G(p)$

b) $N-1$ admet une expérience et une variance comme c'est une loi géométrique

$$E(N-1) = \frac{1}{p} \quad V(N-1) = \frac{1-p}{p^2}$$

$N \in \{2, n\}$: Les $n-1$ premiers lancers définis par la variable $N-1$ et le dernier lancer

Il y a au minimum 2 lancers, si on fait pile au 1^{er} lancer et le lancer si on relance la pièce

$$\forall h \in \{2, n\} \quad P(N=h) = (1-p)^{h-2} p$$

$$P(N=h) = \prod_{i=1}^{h-2} F_i \cap P_{h-1} \quad \text{et les événements sont mutuellement indépendants}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(N-1) = E(N)-1$

$$\Rightarrow E(N) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$$

$$V(N-1) = V(N) = \frac{1-p}{p^2}$$

2a) $n \geq 2$ $P((N=n) \cap S) = P(N=n) \times P(S)$ car les événements sont indépendants
 $= (1-q)^{n-2} p \times p$ car $P(S) = p$ car la probabilité de faire pile au dernier lancer est la même qu'aux $n-1$ lancers précédents
 $= (1-q)^{n-2} p^2$

$$(N=n) \cap S = \bigcap_{i=1}^{n-2} F_i \cap P_{n-1} \cap S$$

b) D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(N=n)_{n \geq 2}$

$$P(S) = \sum_{n \geq 2} P((N=n) \cap S)$$

3a) On a la répétition d'expériences identiques et indépendantes de Bernoulli. Le succès est obtenir 2 piles d'affilée de probabilité $P((N=n) \cap S)$.
 On compte le nombre de succès.

$$R \sim G((1-q)^{n-2} p^2)$$

b) Il faut vérifier que $E(R)$ existe et la calculer.
 $\sum_{n \geq 2} n (1-q)^{n-2} p^2$ est le multiple d'une série géométrique de raison $1-q \in]0, 1[$ donc elle est convergente dérivée

$$E(R) = \frac{p^2}{1-q} \times \frac{1}{1-(1-q)^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1-1^2-2q-q^2)} = \frac{p^2}{-2q+q^2+q^3}$$

En moyenne, on obtient $\frac{p^2}{-2q+q^2+q^3}$ piles isolées avant le premier double pile $\rightarrow$ impossible

a) $i \geq 1 \quad P(N=i) = P_{R \geq i}(N=i)$

$$= \frac{P((R \geq i) \cap (N=i))}{P(R \geq i)}$$

$= 0$ car N_i est égale à 0 si $R \geq i$

b) $i \geq 1$ D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événement $(R \geq i)_{i \geq 1}$

$$P(N_i=0) = \sum_{i \geq 1} P_{R \geq i}(N_i=0) \times P(R \geq i)$$

$$= \sum_{i \geq 1} P(N=i) \times \sum_{k=1}^i (1 - P(R < k))$$

② N_i admet une espérance $\Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} k P(N_i = k)$ converge absolument

$\Rightarrow$ la série $\sum_{k \geq 0} k P(N_i = k)$ converge (car les termes sont tous positifs)

$\Rightarrow 0 \times P(N_i = 0) + 1 \times P(N_i = 1) + \sum_{k \geq 2} k P(N_i = k)$ converge

$\Rightarrow P(N_i = 1) + \sum_{k \geq 2} k p q^{i+k-3}$ converge

On reconnaît le multiple d'une série géométrique de paramètre $q \in]0, 1[$ donc elle converge
diverge

$$\begin{aligned} E(N_i) &= P(N_i = 1) + \frac{pq^i}{q^2} \times \frac{1}{1 - (1-q)^2} \\ &= P(N_i = 1) + pq^{i-2} \times \frac{1}{1 - q^2} \\ &= P(N_i = 1) + \frac{pq^{i-2}}{(1-q)(1+q)} \\ &= P(N_i = 1) + \frac{q^{i-2}}{1+q} \end{aligned}$$

⑤ On reconnaît une série géométrique de raison $q \in]0, 1[$ donc la série converge

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} E(N_i) &= \sum_{i \geq 1} q^{i-1} \frac{1+p}{p} \\ &= \frac{1+p}{pq} \times \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{1+p}{qp^2} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 496795

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$b) \quad n \geq 2 \quad k \in \{0, n\} \quad [T_n = k] = \left[\sum_{i=1}^n N_i = k \right]$$

Donc admettez b)

$$n \geq 2 \quad k \in \{0, n\} \quad P(T_n = k) = P(N_1 + \dots + N_n = k)$$

$$\Rightarrow k P(T_n = k) = k P(N_1 + \dots + N_n = k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n k P(T_n = k) = \sum_{k=2}^n k P(N_1 + \dots + N_n = k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^n k P(T_n = k) = \sum_{k=1}^n k P(N_1 + \dots + N_n = k) - 1 \times P(N_1 + \dots + N_n = 1)$$

c) On admet b) $k \in [0, n]$ $n \geq 2$

La série $\sum_{i=1}^n E(N_i)$ converge d'après 5)

Donc la somme $\sum_{i=1}^n E(N_i)$ converge

$\forall h \in [0, n]$ $k P(T=h) \geq 0$, la suite est croissante

La suite $\sum_{h=2}^n h P(T=h)$ est croissante et majorée par $\sum_{i=1}^n E(N_i)$ donc d'après

le théorème de la limite monotone, elle converge

Donc la somme $P(T=1) + \sum_{h=2}^n h P(T=h)$ converge et T admet une espérance

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{En passant à la limite } E(T) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n E(N_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} E(N_i) \end{aligned}$$

8) def Exp-1(p):

$N=1$

while rd.random() $< p$:

$N=N+1$

if rd.random() $< p$:

$S=1$

else:

$S=0$

return $N+1, S$

3) def Exp-2(p):

R=0

S=0

T=0

while S==0:

R=R+1

E=Exp-1(p)

S=E(2)

T=T+E(1)

return (R,T)

10a) def Freq-T(p,p):

L=[]

for i in range(10**4):

L.append(Exp-2(p))

return sum(L)/(10**4)

11) Loi de Bernoulli

$$E(Y_n) = p^2$$

$$V(Y_n) = p^2(1-p)$$

13) a) $E(S_n) = n E(X_1)$ car les variables sont indépendantes et de même loi

$$\begin{aligned} \text{b) } V\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} V(S_n) \\ &= \frac{p^2}{n} + \frac{(1-p)^2}{n^2} + \frac{2(n-1)p^3(1-p)}{n^2} \end{aligned}$$

14) Si X admet une variance et ne s'écroule

$\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{3p^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \leq 3 \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 \times \frac{1}{n} = 0$ et une probabilité est toujours positive

Donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$