

EC-07662

GAUTIER

Noa

04/10/2006

Note de délibération : 18.02 / 20

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04 / 10 / 2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

07

Numéro de table

60

Exercice 1

1) a) On sait que $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

Donc $e^{-t} - 1 \underset{0}{\sim} -t$

Donc $1 - e^{-t} \underset{0}{\sim} t$

Donc $\frac{1 - e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} 1$

On sait que $\int_0^1 1 \, dt$ converge et vaut 1

Par critère d'équivalence de fonctions continues positives, $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt$ converge

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-t} = 0$ par croissance comparée

Donc $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

On sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge comme intégrale de Riemann convergente

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

de paramètre $2 > 1$

Donc par critère de majorabilité de fonctions continues positives,
on a : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge

2) a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$

Comme $a > 0$, alors $\forall t \in [1, +\infty[$, $-at < 0$

Donc d'après la question précédente, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$
converge (car $\frac{e^{-at}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée)

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ converge

De plus, $e^{-t} - e^{-at} \sim_0 1 - e^{-at}$ car $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} = 1$

Donc d'après la question 1) a), par critère d'équivalence de fonctions
continues positives et car $1 - e^{-at} \sim_0 at$, on a : $\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$
converge

Donc : $\forall a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ converge

2) f) Set $a = 0$

$$\text{Donc } \frac{e^{-t}-1}{t} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{t}$$

On, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ est la série harmonique divergente, donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-0 \cdot t}}{t} dt \text{ diverge}$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-0 \cdot t}}{t} dt \text{ diverge}$$

Set $a < 0$

$$\text{Donc : } \forall t \in [1, +\infty[, -at > 0$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}-e^{-at} = -\infty$$

$$\text{Par croissance comparée et car } e^{-t}-e^{-at} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} 1-e^{-at}$$

$$\text{On a donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t} = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t} \neq 0$$

$$\text{Donc } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t} dt \text{ diverge,}$$

$$\text{Donc : } \forall a < 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-at}}{t} dt \text{ diverge}$$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R}_-$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ diverge

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 0$

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_0^x \frac{(1 - e^{-at}) - (1 - e^{-t})}{t} dt$$

par linéarité de
l'intégrale, les
intégrales étant

convergentes d'après
les questions précédentes

$$= \int_0^x \frac{1 - e^{-at}}{t} dt - \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$

X

$$\begin{aligned} f) G(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(a) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

$$\text{On } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } G(a) = \ln(a)}$$

4) On pose le changement de variable $u = e^{-t}$

$\varphi: u \mapsto e^{-u}$ est C^1 strictement décroissant sur $[0, +\infty[$

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$ et $\int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}-1}{\ln(e^{-t})} \times (-e^{-t}) dt$ sont de même nature et égales car de convergence

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04/10/2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA



Épreuve :

mathématiques approfondies

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

02

/

☐

07

Numéro de table

☐

60

☐

$$\text{On, } \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t} - 1}{\ln(e^{-t})} \times (e^{-t}) dt \text{ converge d'après les gènes précédents}$$

$$\text{et vaut } \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$$

$$\text{et donc vaut } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

$$\text{On, } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \ln(2) \text{ d'après le 3) b)}$$

$$\text{D-c } \int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du \text{ converge et vaut } \ln(2)$$

5) a) On reconnaît une série de Riemann φ est une fonction continue sur $[0, 1]$, a a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{h}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(u) du$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

f) import numpy as np
def Rect(m):

$$U = 0 \quad \# \text{ car } \frac{0}{m} = 0 \text{ car } f(0) = 0$$

for h in range(1, m):

$$U = U + (h/m - 1) / m \cdot \log(h/m) \quad \# \text{ car } \frac{h}{m} \in]0, 1[$$

return (U/m)

c) On introduit un m -uplet au choix coefficient positif d'une loi uniforme $[0, 1]$. En fonction des valeurs des coefficients de ce m -uplet, on associe les valeurs de la fonction f .

La fonction f aura donc une valeur du même type que la fonction Rect sauf qu'au lieu de calculer par rapport à la somme de 0 à $m-1$ de $f(\frac{h}{m})$, on calcule par rapport à la somme de 0 à $m-1$ de $f(u)$ avec u une valeur issue d'une loi uniforme de probabilité $[0, 1]$.

d) La courbe la plus lisse avec le moins de fluctuations est la courbe de la fonction de la question 5)f). Et c'est donc qu'elle varie moins et qu'elle tend sans fléchir vers 0,68, on peut conclure que la question 5)f) nous fournit un meilleur approximation de $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$

Exercice 2

1) a) A est une matrice triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

$$\text{Donc } \text{Sp}(A) = \{0, 5, 12\}$$

b) A possède 3 valeurs propres distinctes

$$\text{Donc } \text{Card}(\text{Sp}(A)) = \dim \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

Donc A est diagonalisable

c) A est diagonalisable, donc il existe $V \in GL_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale formée des valeurs propres de A tq : $A = VDV^{-1}$

$$\text{On pose } D = \text{diag}(0, 5, 12)$$

$$\text{On remarque que : } A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0

$$\text{De plus, } A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc c'est}$$

le vecteur propre associé à la valeur propre 5

Enfin, $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 12

On, on sait que V est une base de A

$$\text{D'où on pose } V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

a) $P_0 = 1$

$$\ell(P_0)(x) = 0$$

$$P_1 = x$$

$$\ell(P_1)(x) = 5x$$

$$\begin{aligned} \forall h \in [2, n], \ell(P_h)(x) &= (x^2 - 1) \times h(h-1)x^{h-2} + 5hx^h \\ &= h(h-1)x^h + 5hx^h - h(h-1)x^{h-2} \\ &= h(h+4)x^h - h(h-1)x^{h-2} \end{aligned}$$

f) Soit P_n polynôme unitaire de degré $d \leq n$

$$\deg(x^2 - 1) = 2 \text{ et } \deg(P'') = d-2 \text{ et } \deg(P') = d-1$$

$$\text{D'où } \deg((x^2 P'' + 5x P')) = d \text{ et } \deg(-P'') = d-2$$

$$\text{D'où } \deg(\ell(P)) = d \text{ car } P \text{ est normal car unitaire}$$

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04 / 10 / 2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA

Ecricome

Épreuve :

mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 /

07

Numéro de table

60

De plus, comme P est unitaire, le coefficient dominant de $(x^2 P''(x) + 5x P'(x))$ est $d(d-1) + 5d$
 soit $d(d+4)$

3)a) On a montré précédemment que ℓ prend en argument un polynôme de degré n , et renvoie un polynôme de degré n . donc ℓ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$

$$\ell(\lambda P + Q) = (x^2 - 1)(\lambda P + Q)''(x) + 5x(\lambda P + Q)'(x)$$

on écrit
de la
dérivée

$$= (x^2 - 1)(\lambda P''(x) + Q''(x)) + 5x(\lambda P'(x) + Q'(x))$$

$$= \lambda(x^2 - 1)P''(x) + 5x\lambda P'(x) + (x^2 - 1)Q''(x) + 5xQ'(x)$$

$$= \lambda \ell(P) + \ell(Q)$$

Donc ℓ est linéaire

Donc $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

f) On note $B = (1, X, X^2, \dots, X^m)$ la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$

D'après la question 2)a)

$$\ell(1) = 0$$

$$\ell(X) = 5X$$

$$\forall h \in [2, m], \ell(X^h) = h(h+4)X^h - h(h-1)X^{h-2}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_B(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 5 & 0 & -6 & & & \\ & & 12 & 0 & & & \\ & & & 21 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -m(m-1) \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & m(m+4) \end{pmatrix}$$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_h[X]$ avec $h \in [10, m]$

Puisque ℓ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ vers $\mathbb{R}_m[X]$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_h[X]$ vers $\mathbb{R}_h[X]$

$$\text{Donc } \ell(P) \in \mathbb{R}_h[X]$$

$\mathbb{R}_h[X]$ est stable par ℓ

$$d) \quad \Psi(1) = 0$$

$$\Psi(x) = 5x$$

$$\Psi(x^2) = 12x - 2$$

On recompte les valeurs de la matrice A et donc la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ qui est $(1, x, x^2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = A$$

4) a) $\text{Mat}_B(\varphi)$ est une matrice triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux

$$0(0+4) = 0$$

$$1(1+4) = 5$$

et pour $h \in [2, m]$, les autres coefficients sont de la forme $h(h+4)$

$$\text{Donc } S_\varphi(\varphi) = \{h(h+4) \mid h \in [0, m]\}$$

8) On étudie le polynôme $\phi(x) = x^2(x+4)$ continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \phi'(x) = 2x + 4 > 0$$

Donc ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{N}$
et $\forall (h, i) \in \mathbb{N}^2$ tq $h > i$, alors $\phi(h) > \phi(i)$

Donc $\text{Card}(S_\varphi(\varphi)) = m+1$ car $h \in [0, m]$.
et les valeurs propres de φ sont 2 à 2 distinctes car le facteur $x^2(x+4)$ est

strictement croissante

Donc E admet bien $m+1$ valeurs propres distinctes

c) Comme E est une endomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$
et que E admet $m+1$ valeurs propres distinctes, soit la dimension de $\mathbb{R}_m[X]$,
on a donc que E est diagonalisable

d) Comme E admet $m+1$ valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres de E sont tous de dimension 1.

Donc il existe un unique polynôme P_h tq $E_{h(h+1)}(E) = \text{Vect}(P_h)$
avec $h \in [0, m]$

est $h \in [0, m]$

On note d le coefficient dominant de P_h et $G_h = \frac{P_h}{d}$

Comme P_h est rigé, G_h est rigé et donc :

$\forall h \in [0, m]$, il existe un unique polynôme unitaire G_h tq

$$E_{h(h+1)}(E) = \text{Vect}(G_h)$$

$$e) E_0(E) = \text{Vect}(G_0)$$

car $\text{Mat}_B(\mathbb{I}) = A$ et $\mathbb{I}$ est la restriction à $\mathbb{R}_0[X]$ de E

On sait d'après la d)c), que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\text{Mat}_B(E)$
associé à la valeur propre 0

$$\text{Donc } G_0 = 1$$

De manière analogue, $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\text{Mat}_B(E)$ pour la valeur
propre 5

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04 / 10 / 2006

Signature

Nom

GAOTIER

Prénom (s)

NOA

Ecricome

Épreuve :

mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04

/ 07

Numéro de table

66

Donc $G_1(x) = x$ car G_1 est unitaire et $\text{Vect}(5x) = \text{Vect}(x)$

f) On sait que d'après la 1)c), $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 12 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de E par la valeur propre 12.

Comme G_2 est unitaire et $\text{Vect}(12x^2 - 2) = \text{Vect}(x^2 - \frac{1}{6})$

$$\text{On a } G_2(x) = x^2 - \frac{1}{6}$$

g) ce résultat est démontré par $h \in \{0, 1, 2\}$

Étant donné que E est d'ordre 3 et que les sous-espaces propres sont en somme directe et donc dans $\mathbb{R}_m[X]$, on a :

$$\forall h \in [2, m], \deg(G_h) \in [2, m]$$

De plus, en raisonnant de manière analogue, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ h(h+1) \\ \vdots \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de E associé à la valeur propre $h(h+1)$

$$\text{Donc } \deg(G_h) = h$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

5) Soit $h \in [0, m]$ et P polynôme de degré h associé à la valeur propre $h(h+4)$ et $Q(x) = P(-x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q'(x) = -P'(-x)$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, Q''(x) &= -(-P''(-x)) \\ &= P''(-x)\end{aligned}$$

8) On sait que $\mathcal{L}(P) = (h(h+4))P$

$$\text{Donc } \mathcal{L}(P)(-x) = (h(h+4))P(-x)$$

$$\text{On a } Q(x) = P(-x)$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}(Q)(x) = h(h+4)Q(x)$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}(Q) = h(h+4)Q$$

Donc Q est polynôme de degré h associé à la valeur propre $h(h+4)$

c) X

6) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}$ car $t \mapsto P(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$ est continue sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}\langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 Q(t)P(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \langle Q, P \rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle, \rangle$ est symétrique

Alors $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[x])^3$

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R \rangle &= \int_{-1}^1 (\lambda P + Q)(t) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (\lambda P(t) + Q(t)) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale les intégrales étant convergentes

$$\begin{aligned}&= \lambda \int_{-1}^1 P(t) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt + \int_{-1}^1 Q(t) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche et symétrique

Donc $\langle, \rangle$ est bilinéaire

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P^2(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$\text{Or, } \forall t \in [-1, 1], P^2(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \geq 0$$

Donc par croissance de l'intégrale (les termes étant dans l'ordre croissant),

$$\int_{-1}^1 P^2(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \langle P, P \rangle \geq 0$$

Donc $\langle, \rangle$ est positive

$$\text{Si } \langle P, P \rangle = 0$$

$$\int_{-1}^1 P^2(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = 0$$

Par positivité de l'intégrale nulle,

$$\forall t \in [-1, 1], P^2(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]-1, 1[, P^2(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in]-1, 1[, P(t) = 0$$

P admet une infinité de racine donc $P = 0$

Donc $\langle, \rangle$ est définie

Donc $\langle, \rangle$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$

7) a) On pose le changement de variable $t = \sin(\alpha)$
 $f: t \mapsto \sin(t)$ est C^1 strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Le fct $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{3}{2}}$ étant continue sur $[-1, 1]$,

d'après le théorème de changement de variable

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(\alpha))^{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) d\alpha$$

$$\text{car } \forall \alpha \in \mathbb{R}, \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\alpha))^{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\alpha) \times \cos(\alpha) d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\alpha) d\alpha$$

Numéro d'inscription

07662

Né(e) le

04 / 10 / 2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA



Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

05

/

☐

07

Numéro de table

☐

60

☐

$$\text{Donc } \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds$$

$$b) \forall s \in \mathbb{R}, \cos^4(s) = \cos^2(s) \times \cos^2(s) \\ = (1 - \sin^2(s))$$

X

$$\text{On admet que : } \forall s \in \mathbb{R}, \cos^4(s) = \frac{1}{8} (\cos(4s) + 4 \cos(2s) + 3)$$

$$c) \|G_0\|^2 = \langle G_0, G_0 \rangle \\ = \langle 1, 1 \rangle$$

$$= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds \text{ d'après 7)a)}$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(4s) + 4 \cos(2s) + 3 ds \text{ d'après 7)b)}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left[\frac{1}{4} \sin(4s) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 4 \left[\frac{1}{2} \sin(2s) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 3s \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(-2\pi)}{4} + 2(\sin(\pi) - \sin(-\pi)) + 3\pi \right)$$

pu lier les
intégrales
les intégrales
étaient correctes
car les fonctions
sur $\mathbb{R}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

La fonction sinus est 2π périodique et $\sin(0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \|G_0\|^2 &= \frac{1}{4} (\sin(\pi) - \sin(-\pi)) + \frac{3}{8} \pi \\ &= \frac{1}{4} (0 - (0)) + \frac{3}{8} \pi \\ &= \frac{3}{8} \pi \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|G_0\|^2 = \frac{3}{8} \pi$$

8) a) le facteur est $P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de facteurs dérivables sur $\mathbb{R}$
soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f_1'(t) &= P''(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} + \left(P'(t) \left(\frac{5}{2} \times (-2t) \times (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right) \\ &= P''(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} - 5t P'(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall t \in \mathbb{R}, f_1'(t) = P''(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}} - 5t P'(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

1) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_m[x]$

$$\langle \ell(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 \ell(P)(t) Q(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$$

$$= \int_{-1}^1 ((t^2-1)P''(t) + 5tP'(t)) Q(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$$

$$= - \int_{-1}^1 ((1-t^2)P''(t) - 5tP'(t)) Q(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$$

$$= - \int_{-1}^1 ((1-t^2)^{\frac{5}{2}} P''(t) - 5tP'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}) Q(t) dt$$

On pose $u(t) = Q(t)$ et $v(t) = P'(t)(1-t^2)^{\frac{5}{2}}$

u et v sont C^1 sur $[-1, 1]$

Par intégration par parties

$$\begin{aligned} \langle \ell(P), Q \rangle &= \left[Q(t) P'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 Q'(t) P'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt \\ &= 0 + \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt \end{aligned}$$

Donc $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, $\langle \ell(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$

c) $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, $\langle \ell(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$
 $= \int_{-1}^1 Q'(t) P'(t) (1-t^2)^{\frac{5}{2}} dt$
 $= \langle \ell(Q), P \rangle$

$= \langle P, \ell(Q) \rangle$ par symétrie du produit scalaire

Donc ℓ est un e -de morphisme symétrique

c) $\mathcal{L}$ étant symétrique et donc diagonalisable, il existe une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ formée des vecteurs propres de $\mathcal{L}$. La famille $(G_0, \dots, G_m)$ étant une base de vecteurs propres de $\mathcal{L}$ et la plus petite base de vecteurs propres de $\mathcal{L}$

Alors, $(G_0, \dots, G_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n(X)$

Donc $\forall h \in [1, m]$, $(G_0, \dots, G_h)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_h[X]$

e) On sait que G_h est orthogonal à tout les autres $G_0, \dots, G_{h-1}$

On $(G_0, \dots, G_{h-1})$ forme une base de $\mathbb{R}_{h-1}[X]$

Donc soit $P \in \mathbb{R}_{h-1}[X]$ tq $P = \sum_{i=0}^{h-1} a_i G_i$ avec $(a_0, \dots, a_{h-1}) \in \mathbb{R}^h$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \langle G_h, P \rangle &= \left\langle G_h, \sum_{i=0}^{h-1} a_i G_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} a_i \underbrace{\langle G_h, G_i \rangle}_{=0 \text{ car } \perp} \text{ par linéarité du produit scalaire} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $G_h \perp \mathbb{R}_{h-1}(X)$ pour tout $h \in [1, m]$

g) a) $\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\langle PQ, R \rangle$

$$= \int_{-1}^1 (PQ)(t) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \int_{-1}^1 P(t) Q(t) R(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04/10/2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA

ecricome

Épreuve :

mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06

07

Numéro de table

60

$$= \int_{-1}^1 P(t) (Q(t) R(t)) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \int_{-1}^1 P(t) (QR)(t) (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

$$= \langle P, QR \rangle$$

$$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{R}_m[x])^3, \langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle$$

$$e) x G_2(x) = G_3(x) + \frac{10}{48} G_1(x)$$

$$\text{Dac } G_3(x) = x^3 - \frac{1}{6} x x + \frac{10}{48} x x$$

$$= x^3 + \frac{60-48}{6 \times 48} x$$

$$= x^3 + \frac{12}{6 \times 48} x$$

$$= x^3 + \frac{1}{24} x$$

$$\text{Dac } \forall x \in \mathbb{R}, G_3(x) = x^3 + \frac{1}{24} x$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

10) a) def Prod(P, m):

Q = np.zeros(m+1)

for h in range(0, m):

Q[h] =

return Q

X

f) def VP(m, h):

P = np.zeros(m+1)

for h in range(0, m):

P[h] =

return P

X

Prolème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Soit $x \in]0, 1[$

$$\sum_{h=1}^n x^h = x \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

f) Soit $x \in]0, 1[$

$$(1-x)^2 \sum_{h=1}^n h x^{h-1} = \sum_{h=1}^n h x^{h-1} - 2 \sum_{h=1}^n h x^h + \sum_{h=1}^n h x^{h+1}$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)x^h - 2 \sum_{h=1}^n h x^h + \sum_{h=2}^{n+1} (h-1)x^h$$

X

c) On reconnaît que Y suit la géométrie de paramètre $\frac{d}{d+1}$

Donc $E(Y)$ et $V(Y)$ existent et :

$$E(Y) = \frac{d+1}{d} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{\frac{1}{d+1}}{\left(\frac{d}{d+1}\right)^2} = \left(\frac{d+1}{d^2}\right)$$

d) On sait que : $P(Y=n) = \left(1 - \frac{d}{d+1}\right)^{n-1} \left(\frac{d}{d+1}\right)$

Comme $\{Y > n\}$ signifie qu'on a atteint pas le rang d'apparition de d pour la n ème fois, on va utiliser la probabilité $\frac{d}{d+1}$,

$$\text{on a : } P(Y > n) = \left(1 - \frac{d}{d+1}\right)^n = \left(\frac{1}{d+1}\right)^n$$

$$2)a) E(X | [Y > n]) = \sum_{i=0}^n i P(X=i | [Y > n])$$

On sait qu'on a obtenu au moins n fois 0, et que X ne peut valoir autre chose que 0 si $i \leq n-1$ (car il faut au moins n fois 0 pour avoir $Y > n$)

$$\text{On a } E(X | [Y > n]) = n$$

$$3)b) E(X) = \frac{\sum_{i=0}^n i P(X=i) + n P(Y > n)}{P(Y > n)}$$

cf 'a/c 3)a)

Partie II

$$4) \forall n \in \mathbb{N}, U_n \sim [0, d]$$

Donc U_n a densité constante et $E(U_n) = \frac{d}{2}$

$$5) S_2(\omega) = (U_1 + U_2)(\omega) \\ = [0, 2d]$$

8) U_1 et U_2 sont indépendants

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{N}, P(S_2 = h) &= P(U_1 + U_2 = h) \\ &= \sum_{i=0}^{2d} P(U_1 = i) P(U_1 + U_2 = h) \\ &= \sum_{i=0}^d P(U_1 = i) P(U_1 + U_2 = h) \text{ car } U_i = 0 \text{ for } i > d \\ &= \sum_{i=0}^d P(U_1 = i) P(U_2 = h - i) \end{aligned}$$

6) a) ~~def~~ ~~Attacher(d):~~
 ~~$S = \text{rel. random}(0, d+1)$~~
~~for h in range(1, m):~~
~~if $S \geq d$:~~
~~return h~~
~~else~~

Numéro d'inscription

07662



Né(e) le

04/10/2006

Signature

Nom

GAUTIER

Prénom(s)

NOA



Épreuve :

clatématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07

/ 07

Numéro de table

66

6) b)

def $E_{\text{sp}} T(d, N)$: $E = 0$ for h in range(N): $E = \text{Attache}(d)$ return $1/N * E$

On utilise la liste des grands nombres

c) On conjecture que plus d est grand, plus l'espérance de T vaut e soit e^1 .

$$7) a) \forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^N i P(V=i)$$

$$= \sum_{i=1}^N (P(V \leq i) - P(V \leq i-1))$$

$$= \sum_{i=1}^N i P(V \leq i) - \sum_{i=1}^N i P(V \leq i-1)$$

$$= \sum_{i=1}^N i P(V \leq i) - \sum_{i=1}^{N-1} (i+1) P(V \leq i)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N i P(V \leq i) - \sum_{i=1}^N i P(V \leq i) - \sum_{i=1}^{N-1} P(V \leq i) + N P(V \leq N) \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} P(V \geq i) + N P(V \geq N) \\
 &\quad \times
 \end{aligned}$$

$$7)d) \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N i P(V=i) = E(V)$$

$$\text{On } \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N i P(V=i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^N P(V \geq m) - N P(V \geq N+1)$$

$$\text{On sait que } \lim_{N \rightarrow +\infty} N \times P(V \geq N+1) = 0$$

$$\text{Donc } E(V) = \sum_{m=1}^{+\infty} P(V \geq m)$$

$$8)e) \text{ a admet que } E(T) = \left(\frac{d+1}{d}\right)^d$$

$$\text{On, } \left(\frac{d+1}{d}\right)^d = e^{d \ln(1 + \frac{1}{d})}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) \sim \frac{1}{d} \quad \text{car } \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} = 0$$

$$\text{Donc } d \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) \sim 1$$

$$\text{Donc } \lim_{d \rightarrow +\infty} d \ln \left(1 + \frac{1}{d} \right) = 1$$

Donc par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \left(\frac{d+1}{d} \right)^d = e$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{d \rightarrow +\infty} E(T) = e} \quad (\text{coefficient de la partie 6)c})$$

Partie III

9)a) Soit $S_1 \subset \mathcal{R}([0, d])$ de densité f_1 avec $d \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, d] \\ \frac{1}{d} & \text{si } x \in [0, d] \end{cases}$$

$$\boxed{E(S_1) = \frac{d}{2}}$$

$$\boxed{V(S_1) = \frac{d^2}{12}}$$

$$f)(S_2)(\Omega) = [0, 2d]$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, F_{S_2}(x) = 0$$

$$\forall x \in]2d, +\infty[, F_{S_2}(x) = 1$$

$$\text{Donc par dérivation } f_2 = F_{S_2}'(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+ \cup [2d, +\infty[$$

10) a) ~~Wm~~ Get $n \in \mathbb{N}^+$

$$\bullet \forall x \in]-\infty, 0[, f_n(x) = 0$$

$$\boxed{\text{Dac } \forall x \in]-\infty, 0[, f_{n+1}(x) = 0}$$

$$b) \forall x \in [0, d], f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)! d^n}$$

$$\text{Dac } \forall x \in [0, d], f_{n+1}(x) = \frac{x^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)! d^{n+1}}$$

$$\boxed{= \frac{x^n}{n! d^n}}$$