Copie anonyme - n°anonymat : 853616

D9-00288 853616 Mat Appli

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1) def suite_u(a, n):
    u = a
    for k in range(1, n+1):
        u = u**2 - u + 1
    return u

2) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. La fonction $t \mapsto t^2 - t + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Elle est donc continue en ℓ. Ainsi, par théorème du point fixe, on a :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 1 \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$
$$\iff (\ell - 1)^2 = 0$$
$$\iff \ell = 1$$

Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n$$
$$= u_n^2 - 2u_n + 1$$
$$= (u_n - 1)^2 \geq 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc elle est minorée par son premier terme u_0. Or $u_0 = a$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant a$

c) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors, d'après 2), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Sachant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après 3)a)), par théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Or, c'est absurde car d'après 3)b), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par a et a est strictement supérieur à 1, donc par transitivité, $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

4) La proposition $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$ est vraie. (proposition 2).

Soit n au voisinage de $+\infty$. D'après 3)b), $u_n \geqslant a > 0$.
Donc $u_n \neq 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}$$

Or, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$
et par composition

Donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1$

Donc $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$

5)a) • Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$ existe si et seulement si $\begin{cases} u_n - 1 \neq 0 \\ u_{n+1} - 1 \neq 0 \end{cases}$

• Or, d'après 3)b), $u_n \geq a$ et $a > 1$ donc par transitivité, $u_n > 1$, d'où $u_n - 1 > 0$ donc $u_n - 1 \neq 0$.

~~• On pose $g : t \mapsto t^2 - t$, définie sur $\mathbb{R}$~~

~~$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ donc $g(t) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$~~

• $u_{n+1} - 1 = u_n^2 - u_n$
$= u_n(u_n - 1)$

Or $u_n \neq 0$ et $u_n - 1 \neq 0$
Donc $u_{n+1} - 1 \neq 0$.

Donc $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe, pour tout entier naturel n

• Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_{n+1} - 1 - (u_n - 1)}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$$
$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{u_n - 1}{u_n^2 - u_n}$$

$$= \frac{1}{u_n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right)$$ par télescopage

$$= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$

c) Par comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = +\infty$

Par somme, $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} - 1 = +\infty$

Par quotient, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 0$

Par somme, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{a-1} \in \mathbb{R}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a-1}$

6)a) • D'après 3)b), $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$. Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) \in [0;1]$

• D'après 5)c), en prenant $a=2$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2-1} = 1$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

Donc la loi de X est bien définie.

b) Montrons par récurrence que :
$\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $P_n : 2^n(2^n-1) + 1 \geq 2^{n+1}$

① Initialisation $n=2$

$2^2(2^2-1)+1 = 4(4-1)+1 = 4\times 3+1 = 12+1 = 13$
$2^{2+1} = 2^3 = 8$.

or $13 \geq 8$.
Donc P_2 est vraie et P_n est initialisée.

② Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie.
Montrons que P_{n+1} est vraie. $P_{n+1} : 2^{n+1}(2^{n+1}-1)+1 \geq 2^{n+2}$

Par hypothèse de récurrence

Soit $n \in [2;+\infty[$.

$$2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1} \iff 2^{2n}-2^n+1-2^{n+1} \geq 0$$
$$\iff 2^n(2^n-1-2)+1 \geq 0$$
$$\iff 2^n(2^n-3)+1 \geq 0.$$

or $n \geq 2$ donc par stricte croissance de la fonction puissance sur $\mathbb{R}_+^*$, $2^n \geq 4$, donc par transitivité, $2^n > 3$ d'où $2^n - 3 > 0$.
Ainsi par somme et produit, $\forall n \in [2;+\infty[$, $2^n(2^n-3)+1 \geq 0$

Donc, par équivalence, $\forall n \in [2;+\infty[$, $2^n(2^n-1)+1 \geq 2^{n+1}$

c) Montrons par récurrence que :
$\forall n \in [2;+\infty[$, $P_n : u_n \geq 2^n$

① Initialisation $n=2$

$u_2 = u_1^2 - u_1 + 1$
or $u_1 = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$
D'où $u_2 = 3^2 - 3 + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$

Et $2^2 = 4$.
Or $7 \geq 4$
Donc P_2 est vraie et P_n est initialisée.

② Hérédité

Soit $n \in [2; +\infty[$ tel que P_n est vraie
Montrons que P_{n+1} est vraie.

$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$
$= u_n(u_n - 1) + 1$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 2^n$, donc par somme et produit,
$u_{n+1} \geq 2^n(2^n - 1) + 1$ d'après c)
d'où $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie et P_n est héréditaire

③ Conclusion

P_n est initialisée et héréditaire, donc vraie pour toutes valeurs de n, par principe de récurrence
Ainsi, $\forall n \in [2; +\infty[$, P_n : $u_n \geq 2^n$

Or $u_0 = 2 \geq 2^0$
et $u_1 = 3 \geq 2^1$

Donc l'inégalité est valable pour $n = 0$ et $n = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2^n$

d) X possède une variance et une espérance, si et seulement si X possède un moment d'ordre 2, donc si et seulement si, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |n^2 P(X=n)|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$|n^2 P(X=n)| = |n^2 u_n|$ d'après 3)b)
$= n^2 u_n$ car $n^2 u_n > 0$
$\leq \frac{n^2}{2^n}$ d'après 6)c) et par encore décroissance de $x \mapsto \frac{1}{2^x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2

1) a) Ce problème est un problème de Cauchy-linéaire qui possède, par propriété, qu'un seul couple (f, g) solution.

b) f et g sont toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par somme et produit, $f' = f - 2g$ et $g' = 2f + 5g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donc f et g sont 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

f solution de $(E) \iff f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 0$
$\iff f'(x) - 2g'(x) - 6(f(x) - 2g(x)) + 9f(x) = 0$
$\iff f(x) - 2g(x) - 2(2f(x) + 5g(x)) - 6(f(x) - 2g(x)) + 9f(x) = 0$

$\iff f(x) - 2g(x) - 4f(x) - 10g(x) - 6f(x) + 12g(x) + 9f(x) = 0$
$\iff 0 = 0$
ce qui est toujours vrai.

Donc f est solution de (E)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) $f'(0) = f(0) - 2g(0)$ ↓ d'après l'énoncé.

$= 1 - 2 \times 1$

$= 1 - 2$

$= -1$

Donc $f'(0) = -1$

c) f est solution de (E). Déterminons une solution de (E).

(E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

3) a) $(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ f(x) + g'(x) = 3f(x) + 3g(x) \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$(S) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

---

b) $h(0) = f(0) + g(0)$
$= 1 + 1$
$= 2$

donc $h(0) = 2$

On pose $(E) : h' = 3h$

Par propriété, $\mathcal{S}_{(E)} = \{ \lambda e^{3x}, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \}$

Or $h(0) = 2 \iff \lambda e^{3\times 0} = 2$
$\iff \lambda = 2$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 2e^{3x}$.

c) $(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) & \text{d'après 3)a)} \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h(x) = 2e^{3x} \end{cases}$ car $h'(x) = 3h(x) \iff h(x) = 2e^{3x}$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = -2f(x) - 2g(x) + 3f(x) \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$ car $h = f+g$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 2h(x) \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

$(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$

4) a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$x \mapsto 3x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine à valeurs dans $\mathbb{R}$. $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, $x \mapsto e^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

J'ai, par produit, $x \mapsto axe^{3x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. donc f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f_a solution particulière de (ED) $\Leftrightarrow f_a'(x) = 3f_a(x) - 4e^{3x}$

$\Leftrightarrow a(e^{3x} + 3xe^{3x}) = 3axe^{3x} - 4e^{3x}$

$\Leftrightarrow ae^{3x} + 3axe^{3x} = 3axe^{3x} - 4e^{3x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ 3a = 3a \end{cases}$ par identification

$\Leftrightarrow a = -4$

Donc f_a est solution particulière de (ED) si et seulement si $a = -4$

b) f est solution particulière de (ED), d'après 3) c),
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f_{-4}(x)$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -4xe^{3x}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -4xe^{3x}$
d'où $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -4(e^{3x} + 3xe^{3x})$
$= -4e^{3x}(1 + 3x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) - 2g(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f'(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}(-4xe^{3x} + 4e^{3x}(1 + 3x))$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -2xe^{3x} + 2e^{3x}(1+3x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2e^{3x}(-x+1+3x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2e^{3x}(2x+1)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2e^{3x}(2x+1)$

5) a) def f(x):
    return (-4)*x*np.exp(3*x)

def g(x):
    return 2*np.exp(3*x)*(2*x+1)

b) X = np.linspace(-1/2, 1/2, 10000)
Y = [f(x) for x in X]
Z = [g(x) for g in X]

plt.plot(X, Y, 'label = 'f')
plt.plot(X, Z, 'label = 'g')
plt.show()

Exercice 3

1) a) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;\theta])$

Par propriété,
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Par propriété,

$$E(X) = \frac{\theta}{2} \qquad V(X) = \frac{\theta^2}{12}$$

2) a) Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$[Y_n \leqslant x] = [\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x]$$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

car le maximum des $X_1, X_2, \dots, X_n$ est inférieur à x si et seulement si tous les $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ sont plus petits que x.

Donc $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x)$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right)$$ par indépendance des $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x)$$ car $\forall i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit la même loi que X
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X \leqslant x)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} F(x)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

b) Soit $n \in [\![2;+\infty[\![$.

Montrons que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de points.

- $x \mapsto 0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
  $x \mapsto \frac{x}{\theta} \in \mathcal{C}^1(]0;\theta[)$ donc par produit, $x \mapsto \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \in \mathcal{C}^1(]0;\theta[)$
  $x \mapsto 1 \in \mathcal{C}^1(]\theta;+\infty[)$

Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sauf peut-être en 0 et θ.

- Sachant que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0;\theta\})$, f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]\theta;+\infty[$.

* Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{\theta} = 0$. Par produit, $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$. D'où $F_n(0) = \lim\limits_{x \to 0} F_n(x) = 0$.

Donc F_n est continue en 0.

* Par quotient et produit, $\lim\limits_{x \to \theta^-} \left(\frac{x}{\theta}\right)^n = 1$.

$\lim\limits_{x \to \theta^+} 1 = 1$. D'où $F_n(\theta) = \lim\limits_{x \to \theta} F_n(x) = 1$.

Donc F_n est continue en θ.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc Y_n est une variable aléatoire à densité

Par propriété,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de Y_n.

3) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $P(\theta U \leqslant x) = P\left(U \leqslant \frac{x}{\theta}\right)$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{\theta} < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leqslant \frac{x}{\theta} \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= P(U \leqslant x)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc si U suit la loi uniforme sur $[0;1]$, alors θU suit la loi uniforme sur $[0;\theta]$

b) def var_Y(theta, n):
    X = theta * rd.random(n)
    Y = max(X)
    return Y

4) a) Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

f_n est nulle sauf sur le segment $[0,\theta]$, donc par théorème, Y_n admet une espérance et :

$$E(Y_n) = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx$$

$$= \int_0^\theta \frac{n x^n}{\theta^n} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{n \times \theta^n}{\theta^n \times (n+1)}$$

$$= \frac{n}{n+1}\theta.$$

Donc $E(Y_n) = \frac{n}{n+1}\theta$

b) Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$

f_n est nulle sauf sur le segment $[0;\theta]$ et $x \mapsto x^2$ est continue sur $[0;\theta] \subset \mathbb{R}$, donc par théorème de transfert, Y_n admet un moment d'ordre 2, et une variance et:

$$E(Y_n^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta} \frac{x^{n-1}}{\theta^{n-1}} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} dx$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^\theta$$

$$= \frac{n}{n+2} \theta^2.$$

Par formule de Kœnig-Huygens,

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E(Y_n)^2$$

$$= \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2$$

$$= \frac{n\theta^2(n+1)^2 - n^2(n+2)\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n\theta^2((n+1)^2 - (n+2)n)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n\theta^2(n^2+2n+1-n^2-2n)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

Donc $V(Y_n) = \dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$

5) Soit $n \in \pi 2i + \infty \pi$

a) On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{n+1}{n}(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

Cette application ne dépend pas de θ. On l'applique à $(Y_1, \dots, Y_n)$. Donc Z_n est un estimateur de Y_n

Y_n possède une espérance donc par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = \frac{n+1}{n} \in (Y_n) = \frac{n+1}{n} \times \frac{n}{n+1} \times \theta = \theta$

Donc $\underline{E(Z_n) = \theta}$

b) $Z_n^2 = \left(\frac{n+1}{n} Y_n\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Y_n^2$

Y_n^2 admet une espérance, donc par linéarité de l'espérance,

$$E(Z_n^2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 E(Y_n^2)$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{n}{n+2} \times \theta^2$$

Z_n admet un moment d'ordre 2, donc une variance, et par formule de König - Huygens, on a :

$$V(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \times \frac{n}{n+2} \times \theta^2 - \theta^2$$
$$= \theta^2 \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{n}{n+2} - 1\right)$$
$$= \theta^2 \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1\right)$$
$$= \theta^2 \left(\frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+2)}\right)$$
$$= \theta^2 \times \frac{1}{n(n+2)}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $V(Z_n) = \dfrac{\theta^2}{n(n+2)}$

6) a) Soit $n \in [\![47; +\infty[\![$.

$$\frac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1 \iff \theta^2 \leqslant n+2 \iff n \geqslant \theta^2 - 2 \quad (I)$$

Or $\theta \in [5, 7]$ donc $5 \leqslant \theta \leqslant 7$, donc par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}$, $25 \leqslant \theta^2 \leqslant 49$, d'où $\theta^2 - 2 \leqslant 47$.

Donc $(I) \iff n \geqslant 47$.

Donc $\forall n \in [\![47; +\infty[\![, \dfrac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1$

b) Soit $n \in [\![2; +\infty[\![$.

Sachant que Z_n admet un moment d'ordre 2, par inégalité de Bienaymé - Tchebitcher, on a pour tout réel ε strictement positif :

$$P(|Z_n - E(Z_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

• Soit $n \in [\![47 ; +\infty [\![$. Soit $\varepsilon > 0$.

$P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) = 1 - P(|Z_n - \theta| < \varepsilon)$.

D'où $1 - P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \leq \dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

donc $P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

Or, d'après 6)a), $\dfrac{\theta^2}{n+2} \leq 1$ donc $\dfrac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

D'où $P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$.

De plus $[|Z_n - \theta| < \varepsilon] \subset [|R_n - \theta| < \varepsilon]$ donc par croissance de la probabilité, on a :
$P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \leq P(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon)$

Donc, par transitivité,

$\forall n \in [\![47 ; +\infty [\![,\ \forall \varepsilon > 0,\ P(|Z_n - \theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{1}{n\varepsilon^2}$

c)

7) La fonction mystère simule 1000 fois Y_{2000} et compte le nombre de fois que Z_{1000} était proche de θ à 0,1 près. La fonction renvoie donc, la fréquence (sur 1000 répétitions), à laquelle Z_{2000} est presqu'égal à θ (θ devant être précisé par l'utilisateur)

Donc, le résultat affiché est la fréquence à laquelle Z_{2000} est presqu'égal à 6, sur 1000 répétitions.

Problème . On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout le problème

1)a).

$P(J_n) = J_n^2 - n J_n$.

Or $J_n^2 = \begin{pmatrix} n & n \\ n & n \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_n$

Donc $P(J_n) = 0_n$

Donc P est un polynôme annulateur de J_n

b) • J_n est une matrice carrée symétrique à coefficients réels, donc par théorème, J_n est diagonalisable.

• Supposons que J_n ... possède plus que deux valeurs propres (elle ne peut en posséder aucune ou une seule car elle est diagonalisable). Alors P, qui est polynôme annulateur de J_n possède au moins 3 racines, car le spectre de J_n est inclus dans les racines de P. Or, c'est absurde car P est un polynôme de degré 2 donc il admet au plus deux racines réelles.
Donc J_n possède deux valeurs propres, qui sont les racines de P.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$P(x) = 0 \iff x^2 - nx = 0$
$\iff x(x-n) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = n$

donc $Sp(J_n) = \{0; n\}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$J_n X = nX \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = n x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i = n x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![2, n]\!],\ n x_1 = \sum_{i=1}^n x_i = n x_k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![2, n]\!],\ x_1 = x_k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$$

Donc $J_n X = nX \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dots x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases}$

d) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $E_n(J_n)$ le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n

$$X \in E_n(J_n) \Leftrightarrow (J_n - nI_n)X = 0_{n,1}$$
$$\Leftrightarrow J_n X = nX$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \vdots \\ x_n = x_1 \end{cases} \quad \text{d'après 1)c)}$$
$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $E_n(J_n) = \text{Vect}(U)$. Or (U) est libre car $U \neq 0_{n,1}$.
Donc (U) est une base de $E_n(J_n)$.
Donc $\dim(E_n(J_n)) = 1$

2) a) • Le graphe est d'ordre 4
• La plus grande distance séparant chaque paire de sommets est entre le sommet 1 et 3 et vaut 2 donc le diamètre du graphe est 2.
• Le degré maximal du graphe est 2.

Donc, le graphe est élément de $E_4(2)$

b) • $G_2 \notin E_5(2)$ car $\deg(1) = 4 \neq 2$.

3)a) $G \in E_n(d)$.

Sachant que $G \in E_n(d)$, le degré maximal de G est d. Donc aucun sommet ne peut posséder plus que d voisins.

Donc S possède d voisins au maximum

b)

c) on a $n \leqslant d + d(d-1) \iff n \leqslant d(d + d - 1)$
$\iff n \leqslant d(2d-1)$

$d(2d-1) - d^2 + 1 = 2d^2 - d - d^2 + 1$
$= d^2 - d + 1 > 0$ car $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

4) A est symétrique car c'est la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté.

5) a) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.

$a_{i,j}$ dénombre le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. Or le graphe G est non orienté et simple, donc il y a au plus une arête entre les sommets i et j. Donc $a_{i,j} \in \{0;1\}$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{i,j} \in \{0;1\}$

b) Le graphe G est simple, c'est-à-dire sans boucle. Donc le sommet i ne peut être relié à lui-même. Donc $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} = 0$

6) a) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$

$B = A^2 = A \times A$ donc par définition du produit matriciel,

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{k,j} \quad \text{car A est symétrique donc } \forall k \in [\![1;n]\!],\ a_{k,j} = a_{j,k}.$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{j,k}$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{j,k}$

b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{i,k} \quad \text{d'après 6)a)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques Appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Or $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,k} \in \{0;1\}$ d'après 5)a), donc $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $a_{i,k}^2 = a_{i,k}$

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$

• Soit $i \in [\![1;n]\!]$. $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ est égal au nombre d'arêtes liées au sommet i, donc $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \deg(i)$.

Or $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\deg(i) = d$.

Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $b_{i,i} = d$

7)a) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$.

$\begin{cases} a_{i,j} = 0 \\ b_{i,j} = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_{i,j} = 1 \\ b_{i,j} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow a_{i,j} + b_{i,j} = 1$ ou $a_{i,j} + b_{i,j} = 1$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ $i \neq j$, $b_{i,j} + a_{i,j} = 1$

c) Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

$b_{i,i} = d$ d'après 6b) et $a_{i,i} = 0$ d'après 5)b)
Donc $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $b_{i,i} + a_{i,i} = d$

8) $A^2 + A = B + A$ car $B = A^2$

or $B + A = (b_{i,j} + a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$= (b_{i,j} + a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} + (b_{i,j} + a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i = j}}$ d'après 7)b) et 7)c)

$= J_n + (d-1) I_n$

Donc $A^2 + A = (d-1) I_n + J_n$.

9) A est symétrique, d'après 4), et à coefficients réels.
Donc, par théorème, A est diagonalisable.

10) a) Par produit matriciel, si on pose $i \in [\![1;n]\!]$,
et $AU = (c_{i,1})_{1 \leq i \leq n}$

$$c_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$$

$$= d\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{d'après 8b)}$$

$$= dU$$

Donc $\underline{AU = dU}$

b) $AU = dU$ et $U \neq 0_{n,1}$ donc U est un vecteur propre de A pour la valeur propre d.

Donc $\underline{d \text{ est valeur propre de } A}$.

11) a) $J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1) X \iff$

b) Supposons que $\lambda = a$.

$J_n X = (a^2 + a - a + 1) X \iff J_n X = (a^2+1) X$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda^2 + \lambda - a + 1 = n \overset{(E)}{\iff} \lambda^2 + \lambda - a + 1 = a^2 + 1$

$\iff \lambda^2 + \lambda - a - a^2 = 0$

$\Delta = 1 + 4(a + a^2) = 4a + 4a^2 + 1$

$= (2a+1)^2 \geq 0$

Donc (E) admet deux solutions réelles:

$\lambda_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{(2a+1)^2}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{(2a+1)^2}}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{-1 - 2a - 1}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1 + 2a + 1}{2}$

$\lambda_1 = -a - 1$ et $\lambda_2 = -a$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 37 | Session : 2026

Épreuve de : Maths. appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

12)a) Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices semblables.
Par définition, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, une matrice inversible tel que $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} tr(B) &= tr(P^{-1}AP) \\ &= tr((P^{-1}A)P) \\ &= tr(P(P^{-1}A)) \\ &= tr(A) \end{aligned}$$

Donc deux matrices semblables ont la même trace

FIN

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094