

Copie anonyme - n°anonymat : 853616



D9-00288

853616

Mat Appli

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1

PARTIE A

1) a) $(x, y) \mapsto xy \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ en tant que fonction polynôme
 $(x, y) \mapsto 1 + xy \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ par somme. Cette fonction est à
valeurs dans $\mathbb{R}^*$, d'après l'énoncé.

$x \mapsto \ln(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$ donc par composition,

$(x, y) \mapsto \ln(1 + xy) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$.

• $(x, y) \mapsto x \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ en tant que fonction coordonnée

• Par somme $(x, y) \mapsto x + \ln(1 + xy) \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$.

Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, qui est un ouvert

Donc f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 sur $\mathcal{O}$

Soit $(x, y) \in \mathcal{O}$.

$$\bullet \partial_x f(x, y) = 1 + \frac{y}{1 + xy}$$

$$\bullet \partial_y f(x, y) = \frac{x}{1 + xy}$$

$$\text{donc } \forall (x, y) \in \mathcal{O}, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{1 + xy} \\ \frac{x}{1 + xy} \end{pmatrix}$$

b) soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

f admet un point critique en $(x, y) \Leftrightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{y}{1+xy} = 0 \\ \frac{x}{1+xy} = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car} \\ 1+xy > 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+xy+y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

car f admet un unique point critique $(0, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$

c) sachant que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ (d'après 1a), elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 et une matrice hessienne.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2}{(1+xy)^2} & \frac{1}{(1+xy)^2} \\ \frac{1}{(1+xy)^2} & -\frac{x^2}{(1+xy)^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } \nabla^2 f(0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\nabla^2 f(0; -1) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(0; -1) - \lambda I_2) = \lambda(1+\lambda) - 1 \\ = \lambda + \lambda^2 - 1$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$\Delta > 0$ donc $\lambda + \lambda^2 - 1$ admet deux racines réelles :

$$\lambda_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Or $\sqrt{5} > 1$ donc $\sqrt{5} - 1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Et $\lambda_1 < 0$.

λ_1 et λ_2 ne sont pas de même signe donc par propriété, le point critique $(0; -1)$ n'est ni un minimum, ni un maximum local de f dans $\mathcal{D}$.

2)a) Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $(x; y) \in \mathcal{D}$, $x \neq 0$.

$$f(x; y) = k \Leftrightarrow x + \ln(1 + xy) = k$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + xy) = k - x \quad \downarrow \quad \text{car } v \mapsto e^v \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Leftrightarrow 1 + xy = e^{k-x}$$

$$\Leftrightarrow xy = e^{k-x} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}$$

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x; y) \in \mathcal{D}, x \neq 0, \quad f(x; y) = k \Leftrightarrow y = \frac{e^{k-x} - 1}{x}$$

b) $H = [(\text{np. exp}(k-x) - 1)/x \text{ pour } x \text{ in } X]$.

Le programme fait apparaître les lignes de niveau k pour $k = -0,4x + \frac{i}{5}$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

PARTIE B

3) Etudions le signe de g sur $\mathbb{R}^*$.

soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -x \geq \ln(1) \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned} \quad \downarrow \text{ par suite croissante de } x \mapsto \ln(x) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

d'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $e^{-x} - 1$	+		-
signe de x	-		+
signe de g	-		-

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) < 0$.

4) Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$, par composition et propriété, $e^{-x} - 1 \sim_{x \rightarrow 0} -x$. d'où par quotient $\frac{-x}{x} \sim_{x \rightarrow 0} -1$.

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$

Donc g admet un prolongement continu en 0.

5) Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \text{on note } t(h) &= \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{e^{-h} - 1}{h} + 1 \right) \\ &= \frac{e^{-h} - 1}{h^2} + \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

• or $\lim_{h \rightarrow 0} -h = 0$ donc par composition et propriété,
 $e^{-h} - 1 \underset{0}{\sim} -h$. D'où par quotient $\frac{e^{-h} - 1}{h} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{h}$

6) a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$x \mapsto -x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ et $x \mapsto e^x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc par composition,
 $x \mapsto e^{-x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$. Par somme $x \mapsto e^{-x} - 1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$.
 $x \mapsto x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Par quotient,
 $x \mapsto \frac{e^{-x} - 1}{x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$.

Donc $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}x - (e^{-x} - 1)}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}$$

avec $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1}{x^2}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

on pose $h: x \mapsto -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

Par somme, composition et produit de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}^*$, h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{aligned} h'(x) &= -(e^{-x} - xe^{-x}) + e^{-x} \\ &= -e^{-x} + e^{-x} + xe^{-x} \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

or $\forall x \in \mathbb{R}^-, h'(x) < 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) \geq 0$ et $h(0) = 0$.

avec h est ^{strictement} décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puis strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$

d'où par quotient, $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) \geq 0$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$, d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

Ainsi, par somme et quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x} = 0$.

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0$

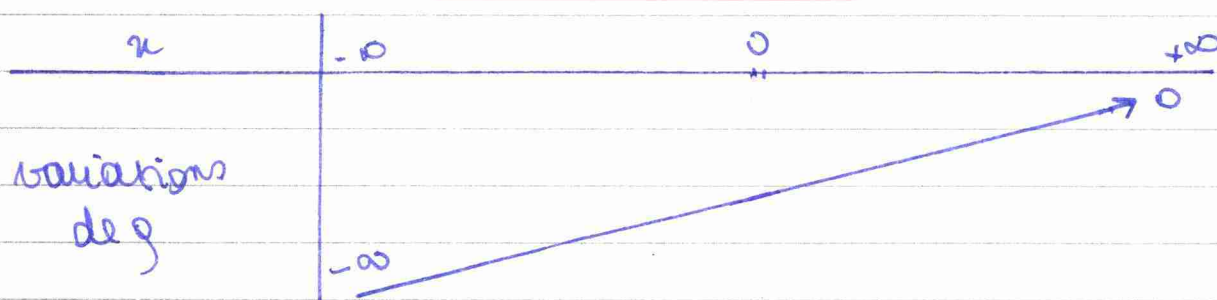
• Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$, par composition on a :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

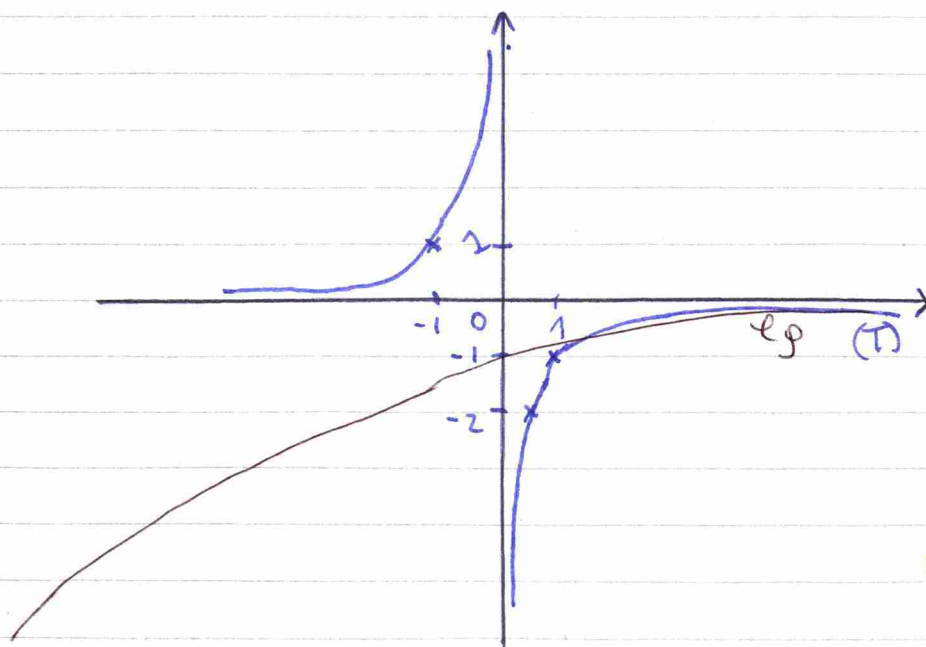
$$\text{soit } p(x) = \frac{x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} \rightarrow +$$

$$= -1 + \frac{x}{2} + o(x^2)$$

D'où par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$



7)



$$f(x) : 1 + x \ln x = 0.$$

PARTIE C

8) p étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable en 0 donc de classe C^1 en 0, p est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $(0; x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc G est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse, $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = p(x)$

9) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x p(t) dt \\ &= \int_0^1 p(t) dt + \int_1^x p(t) dt \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \text{de l'intégrale} \end{array} \right. \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - [\ln(t)]_1^x \\ &= G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)$

10) Soit x au voisinage de $+\infty$

$$\frac{G(x)}{-\ln(x)} = \frac{-G(1)}{\ln(x)} - \frac{\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} + 1$$

On admet que $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-G(1)}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} = 0.$$

d'où par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{-\ln(x)} = 1.$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $G(x) \sim_{x \rightarrow \infty} -\ln(x)$

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, au voisinage de 0.

d'après 9), $G(x) = G(1) + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(x)$

d'où $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = G(x) - G(1) + \ln(x)$

Ainsi $-\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -G(x) + G(1) - \ln(x)$

Donc $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = -G(x) + G(1) - \ln(x)$

EXERCICE 2PARTIE A

1) Montrons que $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha A + B = \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\alpha A + B) &= \alpha a + a' + \alpha d + d' \\ &= \alpha(a + d) + a' + d' \\ &= \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \end{aligned}$$

Donc $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

Donc $\text{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$

2) a) • Montrons que γ est linéaire.

Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ telles que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha M + N = \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\alpha M + N) = (\alpha a + a' + \alpha d + d') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + a' + \alpha d + d' & 0 \\ 0 & \alpha a + a' + \alpha d + d' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \left((a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + (a'+d') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \varphi(M) + \varphi(N)$$

Donc $\forall M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha M + N) = \alpha \varphi(M) + \varphi(N)$

Donc φ est linéaire

- Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\text{tr}(M)$ est un réel. Ainsi, $\text{tr}(M) I$ par loi de multiplication externe appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'où, par somme que $\text{tr}(M) I - M$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc $\varphi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$. φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{b) } \varphi(I) &= \text{tr}(I) I - I \\ &= 1 \cdot I - I \\ &= I \end{aligned}$$

Donc $\varphi(I) = I$

$$\text{c) Soit } M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\varphi(M) = \text{tr}(M) I - M = (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

où $\text{tr}(\varphi(M)) = a + d = \text{tr}(M)$

Donc $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{tr}(\varphi(M)) = \text{tr}(M)$

3) a) $\mathcal{B}_2(E_1, E_2, E_3, E_4)$

• $\varphi(E_1) = \text{tr}(E_1)I - E_1 = I - E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$

• $\varphi(E_2) = \text{tr}(E_2)I - E_2 = -E_2$

• $\varphi(E_3) = \text{tr}(E_3)I - E_3 = -E_3$

• $\varphi(E_4) = \text{tr}(E_4)I - E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_4$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Donc } A^2 = I_4 \text{ est-à-dire } A \cdot A = I_4$$

$$\text{Donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = A.$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_2$$

Les valeurs propres de A sont les solutions des équations :

$$\begin{aligned} -1-\lambda &= 0 & \text{et} & & 1-\lambda^2 &= 0 \\ (E_1) & & & & (E_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_1) \Leftrightarrow \lambda &= -1 & \text{et} & & (E_2) \Leftrightarrow (1-\lambda)(1+\lambda) &= 0 \\ & & & & \Leftrightarrow \lambda &= 1 \text{ ou } \lambda = -1 \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(A) = \{-1; 1\}$.

• Soit $X \in \text{Vect}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$X \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AX = -X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -a \\ -b = -b \\ -c = -c \\ a = -d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = b \\ c = c. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_2} \right).$

Effectuons un test de liberté. Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c.$$

Donc $\mathcal{B}_2$ est libre. Donc $\mathcal{B}_2$ est une base de $E_{-1}(A)$

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n \times 2}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n \times 2}\}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$X \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = a \\ -b = b \\ -c = c \\ d = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{n \times 2}$. Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre donc $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(A)$.

PARTIE B

$$4) \varphi(M) = \text{tr}(M) I - M$$

$$= (a+d) I - M$$

$$= \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$M \varphi(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ dc-cd & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc) I$$

$$= \det(M) I$$

Donc $M \varphi(M) = \det(M) I$.

5) a) sachant que $M \varphi(M) = \det(M) I$, et que M est inversible si et seulement si $\exists P \in M_2(\mathbb{R})$ et $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $MP = aI$, sachant que $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi(M) \in M_2(\mathbb{R})$, M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.

~~Si $\det(M) \neq 0$, alors:~~

$$\cancel{M \varphi(M) = \det(M) I}$$

Si $\det(M) \neq 0$, alors:

$$M \left(\frac{1}{\det(M)} \varphi(M) \right) = I$$

$$\text{Donc } \underline{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \varphi(M)}$$

b) soient $(M, N) \in M_2(\mathbb{R})^2$. $M+N \in M_2(\mathbb{R})$ et est inversible.
Donc d'après 5) a), $\det(M+N) \neq 0$ et on a:

$$\begin{aligned} (M+N)^{-1} &= \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(M+N) \\ &= \frac{1}{\det(M+N)} (\varphi(M) + \varphi(N)) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\ \text{d'après 2) a)} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(M) + \frac{1}{\det(M+N)} \varphi(N) \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{d'après} \\ \text{5) a)} \end{array}$$

$$= \frac{1}{\det(M+N)} \times \det(M) M^{-1} + \frac{1}{\det(M+N)} \det(N) N^{-1}$$

$$\text{Donc } \underline{(M+N)^{-1} = \frac{\det(M)}{\det(M+N)} M^{-1} + \frac{\det(N)}{\det(M+N)} N^{-1}}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE C

6)a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x P_1(x) - P_0(x) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(x) &= x P_2(x) - P_1(x) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, P_2(x) = x$ et $P_3(x) = x^2 - 1$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence ^{forte} que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n: \deg(P_n) = n-1$

① Initialisation $n=1$

$$P_1(x) = 1 \text{ donc } \deg(P_1) = 0 \text{ or } 0 = 1 - 1.$$

Donc P_1 est vraie et P_n est initialisée

② Hérédité

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall P_i$ est vraie, $P_i: \deg(P_i) = i-1$

Montrons que P_{n+1} est vraie, $P_{n+1}: \deg(P_{n+1}) = n$

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Or par hypothèse de récurrence,

$$\deg(P_n) = n-1 \text{ et } \deg(P_{n-1}) = n-2.$$

soit plus $\deg(x) = 1$ donc par produit $\deg(xP_n) \leq n$

Ainsi par somme, $\deg(P_{n+1}) = n$.

Pour P_{n+1} est vraie et P_n est héréditaire

③ Conclusion

P_n est initialisée et héréditaire donc, par principe de récurrence, vraie pour toutes valeurs de n .

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) = n-1$.

7) a) après 4), $M\varphi(M) = I$.

on admet le résultat

b) Montrons par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N}; +\infty, P_n: M^n = -a_{n-1}I + a_n M$

① Initialisation $n=1$

$$\begin{aligned} M^1 &= M \quad \text{et} \quad -a_{1-1}I + a_1 M = a_1 M - a_0 I \\ &= P_1(\text{tr}(M))M - P_0(\text{tr}(M))I \\ &= M - 0 \\ &= M \end{aligned}$$

Donc P_1 est vraie et P_n est initialisée.

② Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}; +\infty$ tel que P_n est vraie, $P_n: M^n = -a_{n-1}I + a_n M$
 Montrons que P_{n+1} est vraie, $P_{n+1}: M^{n+1} = -a_n I + a_{n+1} M$

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M && \downarrow \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (-a_{n-1}I + a_n M)M \\ &= -a_{n-1}M + a_n M^2 && \downarrow \text{d'après 7)b)} \\ &= -a_{n-1}M + a_n (\text{tr}(M)M - I) \\ &= -a_{n-1}M + a_n \text{tr}(M)M - a_n I \\ &= (-a_{n-1} + a_n \text{tr}(M))M - a_n I \\ &= a_{n+1}M - a_n I. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie et P_n est héréditaire.

③ Conclusion

P_n est initialisée et héréditaire, donc vraie pour toutes valeurs de n , par principe de récurrence.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^\infty, P_n: M^n = -a_{n-1}I + a_n M$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{tr}(M^n) &= \text{tr}(-a_{n-1}I + a_n M) && \text{car tr est linéaire} \\ &= -a_{n-1} \text{tr}(I) + a_n \text{tr}(M) && \text{d'après 1)} \\ &= -a_{n-1} + a_n \text{tr}(M). \\ &= P_{n-1}(\text{tr}(M)) + P_n(\text{tr}(M)) \text{tr}(M). \end{aligned}$$

Donc il existe un polynôme Q_n tel que
 $\text{tr}(M^n) = Q_n(\text{tr}(M))$,
avec $Q_n = -P_{n-1} + \text{tr}(M)P_n$

```
8)a) 1 def P(n, x):
      2     P0 = 0
      3     P1 = 1
      4     for k in range(1, n+1):
      5         tmp = P1
      6         P1 = x * P1 - P0
      7         P0 = tmp
      8     return (P0).
```

~~import~~

b) import numpy. linalg as al

```
def Puissance(n, M):
    trace = M[0, 0] + M[1, 1] # trace de M
    a = P(n-1, trace)         # calcul de a_{n-1}
    b = P(n, trace)           # calcul de a_n
    return al.matrix_power(-a * np.eye(2) + b * M, n)
```

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques appliquées		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			

EXERCICE 3

PARTIE A

1) a) $N-1$ donne le rang du premier succès, c'est-à-dire le rang du premier succès d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité p .
Donc $N-1$ suit la loi géométrique de paramètre p .

b) $N-1 \sim G(p)$ donc $(N-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• $N = N-1 + 1$ donc $N(\Omega) = \mathbb{Z}_+ + \infty \mathbb{Z}_+.$

Soit $k \in \mathbb{N}(\Omega)$

$$\begin{aligned} P(N=k) &= P(N-1+1=k) \\ &= P(N-1=k-1) \\ &= q^{k-2} p \end{aligned}$$

Pour $\forall k \in \mathbb{N}(\Omega)$, $P(N=k) = q^{k-2} p$

• Sachant que $N-1 \sim G(p)$, $E(N-1) = \frac{1}{p}$ et $V(N-1) = \frac{1-p}{p^2}$

Par linéarité de l'espérance, $E(N-1) = E(N) - 1$, d'où $E(N) = 1 + E(N-1)$
Donc $E(N) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$.

Par propriété sur la variance, $V(N-1) = V(N)$.
Donc $V(N) = \frac{1-p}{p^2}$

Donc $E(N) = \frac{1+p}{p}$ et $V(N) = \frac{1-p}{p^2}$

2)a) Soit $n \in \mathbb{Z}; +\infty$.

Sachant que $P(N=n) \neq 0$, on a:

$$P((N=n) \cap S) = P(N=n) \times P_{(N=n)}(S)$$

or $P(N=n) = q^{n-2}p$ d'après 1) b)

Et par indépendance des lancers, $P_{(N=n)}(S) = P(P_n) = p$
donc $P((N=n) \cap S) = q^{n-2}p^2$.

Donc $\forall n \in \mathbb{Z}; +\infty, P((N=n) \cap S) = q^{n-2}p^2$

b) $\{(N=n)\}_{n \in \mathbb{Z}; +\infty}$ forme un système complet d'événements
donc par formule des probabilités totales,

$$P(S) = \sum_{n=-2}^{+\infty} P((N=n) \cap S)$$

d'après 2)a)

$$= \sum_{n=-2}^{+\infty} q^{n-2}p^2$$

$$= p^2 \sum_{n=-2}^{+\infty} q^{n-2}$$

par changement d'indice

$$= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

$$= p^2 \times \frac{1}{1-q}$$

$$= p^2 \times \frac{1}{p}$$

$$= p.$$

Donc $P(S) = p$.

3) a) p est égale au rang du premier succès d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de probabilité $P(S) = p$
 donc $R \sim G(p)$.

b) $E(R) = \frac{1}{p}$ par propriété. On obtient donc en moyenne $\frac{1}{p} - 1$ piles jetés avant le premier double pile.

4) a) soit $i \in \mathbb{T}_1 + \infty \mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} P(N_i = 0) &= P(R < i) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} P(R = k) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} (1-p)^{k-1} p \\ &= p \sum_{k=0}^{i-1} (1-p)^{k-1} \\ &= \frac{p}{q} \sum_{k=0}^{i-1} (1-p)^k \\ &= \frac{p}{q} \times \frac{1-q^i}{1-q} \\ &= \frac{1-q^i}{q} \end{aligned}$$

donc $\forall i \in \mathbb{T}_1 + \infty \mathbb{T}, P(N_i = 0) = \frac{1-q^i}{q}$.

b) soit $k \in \mathbb{T}_2 + \infty \mathbb{T}$. soit $i \in \mathbb{T}_1 + \infty \mathbb{T}$.

$$P(N_i = k) = P($$

c) Soit $i \in \mathbb{N}; i \neq 0$

N_i admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{u=2}^{\infty} u P(N_i=u)$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}; n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sum_{u=2}^{\infty} u P(N_i=u) &= \sum_{u=2}^{\infty} u p q^{i+u-3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } \forall k \in \mathbb{N}; n \geq 2, \\ k p q^{i+u-3} > 0. \end{array} \right. \\ &= p \sum_{u=2}^{\infty} k q^{i+u-3} \\ &= p q^{i-2} \sum_{u=2}^{\infty} k q^{u-1} \end{aligned}$$

on reconnaît la somme partielle d'une série géométrique de raison $|q| < 1$, donc convergente. Donc l'espérance existe et sachant que $N_i(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}_+$, on a:

$$\begin{aligned} E(N_i) &= \sum_{u=2}^{\infty} u P(N_i=u) \\ &= p q^{i-2} \left(\sum_{u=0}^{\infty} k q^{u-1} - q^{1-1} - 2q^{2-1} \right) \\ &= p q^{i-2} \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 - 2q \right) \\ &= \frac{p q^{i-2}}{(1-q)^2} - p q^{i-2} - 2p q^{i-1} \\ &= \frac{q^{i-2}}{1-q} - p q^{i-2} - 2p q^{i-1} \\ &= q^{i-2} \left(\frac{q^{-1}}{1-q} - p q^{-1} - 2p \right) \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement QR Code	Code épreuve : 296	Nombre de pages : 30	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques appliquées		
Consignes • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre			
Suite à la page 28.			
25/32			

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

suite à la page 28

Suite à la page 28.

PARTIE B

8) def Exp-1(p):

N = 1

while rd.random() < 1-p:

N = N + 1

if rd.random() < p:

S = 1

else:

S = 0

return N+1, S

9) def Exp-2(p):

R = 0

S = 0

T = 0

while S = 0:

R = R + 1

E = Exp-1(p)

S = E[1]

T = E[0]

return R, T

10) a) def Freq-T(n, p):

S = 0

for i in range(10000):

if Exp-2(p)[1] == n:

S = S + 1

return S/(10000)

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 296

Nombre de pages : 30

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

PARTIE C

11) Soit $n \in \mathbb{N}_1; +\infty \mathbb{N}$.

$Y_n \sim \mathcal{B}(P(P_n P_{n+1}))$

pour la propriété, $E(Y_n) = P(P_n P_{n+1}) = P(P_n)P(P_{n+1}) = p^2$
et $V(Y_n) = P(P_n P_{n+1})(1 - P(P_n P_{n+1})) = p^2(1 - p^2)$

par indépendance
des échantillons
↓

12) Soit $n \in \mathbb{N}_1; +\infty \mathbb{N}$. Soit $m \in \mathbb{N}_{n+2}; +\infty \mathbb{N}$.

a) $Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } P_n P_{n+1} \text{ se réalise} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Y_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_{n+1} P_{n+2} \text{ se réalise} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

~~Y_{n+1} peut être réalisé sans que Y_n soit réalisé. Y_n peut être réalisé sans que Y_{n+1} soit réalisé. Y_n et Y_{n+1} peuvent simultanément être ou ne pas être réalisés. Donc Y_n et Y_{n+1} sont indépendants.~~

13) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Par linéarité de l'espérance, S_n admet une espérance

$$\begin{aligned} \text{et: } E(S_n) &= \sum_{k=1}^n E(Y_k) \\ &= \sum_{k=1}^n p^2 \\ &= p^2 \times \sum_{k=1}^n 1 \\ &= np^2 \end{aligned}$$

Donc $E(S_n) = np^2$.

14) Par con

FIN

