

Copie anonyme - n°anonymat : 853616



D9-00288
853616
Mat Appli

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Preliminaire informatique

1) a) def Norme(X):

S = 0

n = np.shape(X)[0]

for i in range(n)

S = S + (X[i])²

return np.sqrt(S)

b) on obtient, pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|X\|$ et $\left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\|$.

$$\begin{aligned}\|X\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{1}{\|X\|} X \right\| = \left\| \frac{1}{2} X \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Donc on obtient 2 et 1.

le quotient de

2) Le script vérifie que la norme au carré de la matrice AX , avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

sur la norme de X , au carré, est compris entre 0,4 et 1,6.

```

3) def est_isom(A, LX, eps):
    n = np.shape(LX)[1]
    for i in range(n):
        if (1-eps)*Norme(X)**2 <= Norme(np.dot(A,X))
            **2 <= (1+eps)*Norme(X)**2:
            return True
    else:
        return False

```

$$\bullet \| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \|^2 = (-1)^2 + 3^2 = 10.$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \|AX\|^2 = 1^2 + 3^2 + (-1)^2 = 11$$

$$\text{On a } 0,8 \times 10 = 8 \quad \text{et} \quad 1,2 \times 10 = 12.$$

$$\text{or } 8 \leq 11 \leq 12.$$

$$\bullet \| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \|AX\|^2 = (-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } 0,8 \times 5 = 4 \quad \text{et} \quad 1,2 \times 5 = 6$$

$$\text{or } 4 \leq 5 \leq 6$$

Dans la console renvoie True.

Le lemme de Johnson-Lindenstrauss

4) $n = \text{int}(\text{input} = 'n?')$
 $m = \text{int}(\text{input} = 'm?')$
 $\text{print}((1/n * \text{get}(m)) * \text{rd.normal}(0, 1, n, m))$

5) soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

a) soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $x_j \neq 0$

Sachant que $G_{i,j} \sim \mathcal{U}(0,1)$, par transformation affine de la loi normale, on a:
 $x_j G_{i,j} \sim \mathcal{U}(0; x_j^2)$.

b) soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_j \neq 0$.

$x_j G_{i,j} \sim \mathcal{U}(0; x_j^2)$. Les $G_{i,j}$ étant indépendantes, les $x_j G_{i,j}$ le sont également. Par stabilité de la loi normale par addition, on a:

$$\sum_{j=1}^n x_j G_{i,j} \sim \mathcal{U}(0; \sum_{j=1}^n x_j^2).$$

Donc $Y_i \sim \mathcal{U}(0; \sum_{j=1}^n x_j^2)$.

Donc, par propriété, $V(Y_i) = \sum_{j=1}^n x_j^2$

or par formule de Liouville-Huygens, $V(Y_i) = E(Y_i^2) - E(Y_i)^2$
et $E(Y_i) = 0$.

$$\text{d'où } E(Y_i^2) = V(Y_i) = \sum_{j=1}^n x_j^2$$

or $\sum_{j=1}^n x_j^2 = \|X\|^2 = 1$ d'après l'énoncé

Donc $E(Y_i^2) = \|X\|^2 = 1$

c) $Z = \|MX\|^2$

• Soit $w \in \mathbb{R}$.

on a $M(w) = \frac{1}{\sqrt{m}} (G_{ij}(w))_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

D'où $M = \frac{1}{\sqrt{m}} (G_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

De plus $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$

d'où par produit matriciel,

$$MX = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{m}} G_{ik} x_k \right)_{1 \leq i \leq m}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \|MX\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{m}} G_{ik} x_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^2. \end{aligned}$$

Donc $Z = \|MX\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^2$

6) a) Soit $i \in \llbracket 1:m \rrbracket$

- Y_i^2 admet une espérance.
- La fonction $x \mapsto tx \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ en tant que fonction affine à valeurs dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc par composition $x \mapsto e^{tx} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ainsi, par théorème de transfert, $e^{tY_i^2}$ admet une espérance si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{tx}| P(Y_i^2 \leq x) dx \text{ converge}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : *Mathématiques appliquées*

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |e^{tx} P(Y_i^2 \leq x)| &= e^{tx} P(-\sqrt{x} \leq Y_i \leq \sqrt{x}) \\ &= e^{tx} (P(\sqrt{x}) - P(-\sqrt{x})) \\ &= e^{tx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} e^{-\sum_{j=1}^k x_j^2} \right) \end{aligned}$$

je n'aboutis pas...

b) soit $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

$$\text{d'après 6)a), } E(e^{tY_i^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2t)\frac{x^2}{2}} dx$$

7)a) soit $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$

$$tmz = tpx \times \frac{1}{m} \times \sum_{i=1}^m Y_i^2 = t \sum_{i=1}^m Y_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } e^{tmz} &= e^{t \sum_{i=1}^m Y_i^2} \\ &= e^{tY_1^2} \times e^{tY_2^2} \times \dots \times e^{tY_m^2} \\ &= \prod_{i=1}^m e^{tY_i^2} \end{aligned}$$

Or, par indépendance des $(e^{tY_i^2})_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$, et sachant que les $(e^{tY_i^2})_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$ admettent chacune une espérance (d'après 6)a), par propriété, $\prod_{i=1}^m e^{tY_i^2}$ admet une espérance. Donc e^{tmz} admet une espérance

$$\begin{aligned}
 \text{on a } E(e^{tmz}) &= \prod_{i=1}^m E(e^{ty_i^2}) \\
 &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \right)^m
 \end{aligned}$$

$$[Z > 1+\varepsilon] \subset [Z \geq (1+\varepsilon)] \text{ car } [Z \geq (1+\varepsilon)] = [Z > 1+\varepsilon] \cup [Z = 1+\varepsilon]$$

Ainsi, par croissance de la probabilité :

$$\underline{P(Z > (1+\varepsilon)) \leq P(Z \leq (1+\varepsilon))}$$

Je n'aboutis pas pour l'inégalité de Markov

b) d'après 7)a), par monotonie,

$$P(Z > (1+\varepsilon)) \leq E(e^{tmz}) e^{-tm(1+\varepsilon)}$$

or, on a, par propriété et d'après 7)a),

$$\begin{aligned}
 E(e^{tmz}) &= \prod_{i=1}^m E(e^{ty_i^2}) \\
 &= \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{1-2t}} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \right)^m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } E(e^{tmZ}) e^{-tm(1+\epsilon)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \right)^m e^{-tm(1+\epsilon)} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}} \right)^m (e^{-t})^{m(1+\epsilon)} \\
 &= \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-2t}} \right)^m e^{-tm\epsilon}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(Z > (1+\epsilon)) \leq \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-2t}} \right)^m e^{-tm\epsilon}$$

c) On pose $p: t \mapsto -t - \frac{1}{2} \ln(1-2t) - 2t^2$, définie sur $I =]0; \frac{1}{4}]$

- $t \mapsto 1-2t \in \mathcal{C}^1(I)$ en tant que fonction affine, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \ln(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$ donc par composition, $t \mapsto \ln(1-2t) \in \mathcal{C}^2(I)$.
 - $t \mapsto -2t^2 - t \in \mathcal{C}^2(I)$ en tant que fonction polynôme.
- D'où par somme et produit, $p \in \mathcal{C}^2(I)$.

Donc p est dérivable sur I tel que :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in I, p'(t) &= -4t - 1 - \frac{1}{2} \times \frac{(-2)}{1-2t} \\
 &= -4t - 1 + \frac{1}{1-2t} \\
 &= \frac{-4t(1-2t) - (1-2t) + 1}{1-2t} \\
 &= \frac{-4t + 8t^2 - 1 + 2t + 1}{1-2t} \\
 &= \frac{-2t + 8t^2}{1-2t} \\
 &= 2t \times \frac{(-1+4t)}{1-2t}
 \end{aligned}$$

soit $t \in]0; \frac{1}{4}]$.

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$x \text{ est } \leq \frac{1}{4} \text{ d'où } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } -1 \leq -1+t \leq 0.$$

$$\text{et } 0 < 2t \leq \frac{1}{2} \text{ d'où } -\frac{1}{2} \leq -2t < 0 \text{ et } \frac{1}{2} < 1-2t < 1$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, g'(t) < 0.$$

Donc g est décroissante sur I .

Donc g est toujours inférieure à sa limite en 0, si elle existe.

$$\text{or } \lim_{t \rightarrow 0^+} 1-2t = 1 \text{ donc par composition et continuité}$$

$$\text{de la fonction } t \mapsto \ln(t) \text{ en } 1, \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1-2t) = \ln(1) = 0$$

D'où par somme et produit:

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0.$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, g(t) < 0.$$

$$\text{Donc } \forall t \in I, -t - \frac{1}{2} \ln(1-2t) \leq 2t^2.$$

Soit $t \in I$.

$$\text{on a } -t - \frac{1}{2} \ln(1-2t) \leq 2t^2, \quad \downarrow \text{ car } m > 0$$

$$\text{d'où } -mt - m \times \frac{1}{2} \ln(1-2t) \leq 2t^2 m,$$

$$\text{d'où } e^{-mt} - m \frac{1}{2} \ln(1-2t) \leq e^{2t^2 m} \quad \downarrow \text{ par suite croissante de } x \mapsto e^x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

09/24

$$\text{d'où } e^{m \ln(e-t) - m \ln(\sqrt{1-2t})} \leq e^{2mt^2}$$

$$\text{d'où } e^{m \ln\left(\frac{e-t}{\sqrt{1-2t}}\right)} \leq e^{2mt^2}$$

$$\text{d'où } \left(\frac{e-t}{\sqrt{1-2t}}\right)^m \leq e^{2mt^2}$$

$$\text{donc } \left(\frac{e-t}{\sqrt{1-2t}}\right)^m e^{-tm\epsilon} \leq e^{2mt^2} \times e^{-tm\epsilon} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } e^{-tm\epsilon} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{donc } \left(\frac{e-t}{\sqrt{1-2t}}\right)^m e^{-tm\epsilon} \leq e^{m(2t^2 - t\epsilon)}$$

D'où, d'après 7)b) et par monotonie,

$$\underline{P(z)(1+\epsilon)} \leq e^{m(2t^2 - t\epsilon)}$$

d) on pose $h: t \mapsto 2t^2 - t\epsilon$ définie sur I . En tant que polynôme h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in I, h'(t) = 4t - \epsilon.$$

h' s'annule en changeant de signe en $t = \frac{\epsilon}{4}$. Donc,

sachant que h est décroissante puis croissante car $2 > 0$ et que h' change de signe en s'annulant en $t = \frac{\epsilon}{4}$, h admet un minimum local en $t = \frac{\epsilon}{4}$.

Donc $\forall t \in I, h(t) \geq h\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$.

$$\text{or } h\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^2 - \frac{\epsilon^2}{4} = \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{\epsilon^2}{4} = -\frac{\epsilon^2}{8}$$

d'où $\forall t \in I, 2t^2 - t\epsilon \geq -\frac{\epsilon^2}{8}$ car $m > 0$.
 donc $\forall t \in I, m(2t^2 - t\epsilon) \geq -m\frac{\epsilon^2}{8}$

d'où par notre croissance de la fonction $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$,

$$e^{-m\frac{\epsilon^2}{8}} \leq e^{m(2t^2 - t\epsilon)}$$

je n'abais pas.....

8) Les événements $[Z < (1 - \epsilon)]$ et $[Z > (1 + \epsilon)]$ sont incompatibles donc :

$$P([Z < (1 - \epsilon)] \cup [Z > (1 + \epsilon)]) = P(Z < (1 - \epsilon)) + P(Z > (1 + \epsilon)).$$

or $P(Z > 1 + \epsilon) \leq e^{-m\frac{\epsilon^2}{8}}$ d'après 7a)
 et d'après l'énoncé $P(Z < 1 - \epsilon) \leq e^{-m\frac{\epsilon^2}{8}}$
 donc $P(Z < (1 - \epsilon)) + P(Z > (1 + \epsilon)) \leq 2e^{-m\frac{\epsilon^2}{8}}$.

donc $P([Z < 1 - \epsilon] \cup [Z > (1 + \epsilon)]) \leq 2e^{-m\frac{\epsilon^2}{8}}$

9)a) soit $i \in \{1, \dots, n\}$. $x_i \neq 0$.
$$u_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

$$\|u_i\| = \left\| \frac{1}{\|x_i\|} x_i \right\|$$

on pose $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus 0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $x_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_j)_{j=1}^n$ si on

on a $\|x_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$

d'où $\frac{1}{\|x_i\|} x_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} x_i$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \|U\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} x_i \right)^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \right)^2 x_i^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)} \times \sum_{i=1}^n x_i^2} \\
 &= \sqrt{1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } U_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} x_i$$

or $\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \in \mathbb{R}$ donc d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}
 \|U\| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \right| \|X\|. && \begin{aligned} &\text{car } \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} > 0 \\ &\text{car } \sum_{j=1}^n x_j^2 > 0 \end{aligned} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} && \begin{aligned} &\text{car } \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \\ &\text{car les indices } i \text{ et } j \text{ sont} \\ &\text{mults} \end{aligned} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{\|U\| = 1}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$B_i = [(1-\varepsilon) \|x_i\|^2 \leq \|Mx_i\|^2 \leq (1+\varepsilon) \|x_i\|^2]$$

or sachant que $V_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$, on a $x_i = \|x_i\| V_i$

$$\begin{aligned} \text{d'où } B_i &= [(1-\varepsilon) \| \|x_i\| V_i \|^2 \leq \|M \|x_i\| V_i \|^2 \leq (1+\varepsilon) \| \|x_i\| V_i \|^2] \\ &= [(1-\varepsilon) \|x_i\|^2 \|V_i\|^2 \leq \|x_i\|^2 \|MV_i\|^2 \leq (1+\varepsilon) \|x_i\|^2 \|V_i\|^2] \\ &= [(1-\varepsilon) \|x_i\|^2 \leq \|x_i\|^2 \|MV_i\|^2 \leq (1+\varepsilon) \|x_i\|^2] \quad \text{car } \|V_i\|=1 \\ &= [(1-\varepsilon) \leq \|MV_i\|^2 \leq (1+\varepsilon)] \quad \text{car } \|x_i\|^2 \neq 0 \text{ car } x_i \neq 0 \end{aligned}$$

donc $B_i = [(1-\varepsilon) \leq \|MV_i\|^2 \leq (1+\varepsilon)]$.

b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$

M est une $(\mathbb{R}, \chi)$ -isométrie si et seulement si, B_i est réalisée pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

on cherche donc à calculer $P(\bigcap_{i=1}^n B_i)$.

or $[\bigcap_{i=1}^n B_i] = (\bigcap_{i=1}^n \bar{B}_i)$ par loi de de Morgan généralisée

donc $P(\bigcap_{i=1}^n \bar{B}_i) = P(\bigcap_{i=1}^n \bar{B}_i)$

or $P(\bigcap_{i=1}^n \bar{B}_i) \leq \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i)$

or $\bar{B}_i = [\|MV_i\|^2 < (1-\varepsilon)] \cup [\|MV_i\|^2 > (1+\varepsilon)]$

$$\text{Donc } P(\bar{B}_i) = P([Z < (1-\delta)] \cup [Z > (1+\delta)])$$

$$\text{Or d'après 8), } P(\bar{B}_i) \leq 2e^{-m \frac{\epsilon^2}{8}}$$

$$\text{Donc, par somme } \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i) \leq 2ne^{-m \frac{\epsilon^2}{8}}$$

Donc, par transitivité,

$$\underline{P(\bigcap_{i=1}^n B_i)} \leq 2ne^{-m \frac{\epsilon^2}{8}}$$

Donc la probabilité que Π ne soit pas une (ϵ, X) -isométrie est inférieure à $2ne^{-m \frac{\epsilon^2}{8}}$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} m > \frac{8 \ln(2n)}{\epsilon^2} & \text{, d'où } -m < -\frac{8 \ln(2n)}{\epsilon^2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } \frac{\epsilon^2}{8} > 0 \\ \text{par stricte croissance de } x \mapsto e^x \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array} \right\} \\ \text{d'où } -m \frac{\epsilon^2}{8} < -\ln(2n) & \\ \text{d'où } e^{-m \frac{\epsilon^2}{8}} < \frac{1}{2n} & \\ \text{donc } 2ne^{-m \frac{\epsilon^2}{8}} < 1 & \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } 2n > 0. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, par transitivité, } \underline{P(\bigcap_{i=1}^n B_i)} \leq 1.$$

$$\text{Or, par la loi de Borel généralisée, } \widehat{\bigcap_{i=1}^n B_i} = \bigcap_{i=1}^n \widehat{B_i}$$

Je n'abandonne pas mais le raisonnement devrait vous permettre de trouver que $P(\bigcap_{i=1}^n \widehat{B_i}) \geq 1$ donc $P(\bigcap_{i=1}^n \widehat{B_i}) = 1$ (car cette probabilité est inférieure ou égale à 1)

```

10) def Isom(LX, m, eps):
    n = np.shape(LX[0])[0]
    r = len(LX)
    M = (1/np.sqrt(m)) * id.normal(0, 1, [n, m])
    Test = False
    while Test == False:
        M = (1/np.sqrt(m)) * id.normal(0, 1, [n, m])
        for i in range(r):
            S = 0
            if EstIsom(A,

```

```

def Isom(LX, m, eps):
    n = np.shape(LX[0])[0]
    M = (1/np.sqrt(m)) * id.normal(0, 1, [n, m])
    while EstIsom(M, LX, eps) == False:
        M = (1/np.sqrt(m)) * id.normal(0, 1, [n, m])
    return M.

```

E-métries pour les ensembles sporadiques de $U_{n,2}(\mathbb{R})$

11) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

le cardinal de
 Par définition, l'ensemble des parties de $\llbracket 1; n \rrbracket$ de
 cardinal k est égal à $\binom{n}{k}$

Donc $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \# \tilde{\gamma}_k = \binom{n}{k}$

12) a) C_0 est l'ensemble des $x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\langle x \rangle \leq 0$
 donc tels que $\langle x \rangle = 0$.
 donc $C_0 = \{ x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \langle x \rangle = 0 \}$

C_n est l'ensemble des $x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\langle x \rangle \leq n$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que le nombre de composantes non nulles de x est inférieur ou égal à n .
 Sachant que x a n composantes, on a:

$$C_n = \{ x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \langle x \rangle \leq n \} = \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$$

b) $T = \{i_1, \dots, i_n\}$

$$\mathcal{Q}(T) = \{ x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S(x) \subset T \}$$

- soit $x \in \mathcal{Q}(T)$. $x \in \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$. donc $\mathcal{Q}(T) \subset \mathcal{U}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $S(O_{n,1}) = \emptyset$.

- soient $(x, y) \in \mathcal{Q}(T)^2$. soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sachant que $S(x) \subset T$, $\alpha S(x) \subset T$. $S(y) \subset T$.
 donc $\alpha S(x) + S(y) \subset T$.

je n'aboutis pas...

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13) a) Soit $i \in \{1, n\}$.

$$2|x_i||y_i| \leq x_i^2 + y_i^2 \Leftrightarrow (2|x_i||y_i|)^2 \leq (x_i^2 + y_i^2)^2 \text{ par mètre}$$

croissante de
 $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\Leftrightarrow 4x_i^2 y_i^2 \leq x_i^4 + 2x_i^2 y_i^2 + y_i^4$$

$$\Leftrightarrow x_i^4 - 2x_i^2 y_i^2 + y_i^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_i^2 - y_i^2)^2 \geq 0$$

ce qui est toujours vrai

Donc $\forall i \in \{1, n\}$, $2|x_i||y_i| \leq x_i^2 + y_i^2$

b) Supposons que $\|X\| = \|Y\| = 1$. Soit $i \in \{1, n\}$.

d'après 13) a), $2|x_i||y_i| \leq x_i^2 + y_i^2$

Par passage à la somme :

$$\sum_{i=1}^n 2|x_i||y_i| \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } |x_i||y_i| = |x_i y_i| \\ \text{d'où } \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) \end{array} \right\}$$

$$\text{d'où } 2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$$

or par inégalité triangulaire et par monotonie,

$$2 \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 && \text{par linéarité de la somme} \\
 &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 && \text{car } \|X\| = \|Y\| = 1 \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq 2$$

$$\text{Donc } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq 1.$$

$$\text{Donc } \forall i \in \{1, n\}, \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq 1$$

c) on admet que $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|X\| \|Y\|$ dans le cas général.

• dès lors, on a :

$$0 \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right)$$

D'où par même croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

• Supposons que X est nul.

$$\text{On a } \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \text{ donc } \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = 0$$

or $0 \leq 0$. Donc l'inégalité reste vraie pour X nul.
Par analogie, elle reste vraie pour Y nul.

Donc l'inégalité est vraie.

14) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tel que $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$.

Par produit matriciel, on a :

$$AX = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)_{1 \leq i \leq m}$$

$$\text{d'où } \|AX\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2$$

b) Soit $x \in \mathcal{M}_{n \times 2}(\mathbb{R})$.

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $i \in \{1, m\}$

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

d'où par passage à la somme,

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

$$\text{d'où } \|AX\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \quad \swarrow \text{car } \|X\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$$

$$\text{Donc } \forall X \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}), \quad \|AX\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \|X\|^2$$

15) Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n \times 2}(\mathbb{R})^2$

d'après l'énoncé, sachant que $AY \in \mathcal{M}_{m \times 2}(\mathbb{R})$, et $X - Y \in \mathcal{M}_{n \times 2}(\mathbb{R})$ donc $A(X - Y) \in \mathcal{M}_{m \times 2}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AY\| - \|A(X - Y)\| \leq \|AY + A(X - Y)\| \leq \|AY\| + \|A(X - Y)\|$$

$$\text{Or } AY + A(X - Y) = AY + AX - AY = AX.$$

$$\text{D'où } \|AY\| - \|A(X - Y)\| \leq \|AX\| \leq \|AY\| + \|A(X - Y)\|$$

Donc $\forall (x, y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad \|Ax\| - \|A(x-y)\| \leq \|Ax\| \leq \|Ay\| + \|A(x-y)\|$

16) : Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que $u_{n+1} = \frac{f}{4} (3 + u_n)$

et que la fonction $x \mapsto \frac{f}{4} (3 + x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ en tant que fonction affine, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie l , alors $f(l) = l$, par théorème du point fixe.

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{f}{4} (3 + l) = l \Leftrightarrow l = \frac{3f}{4-f} \in \mathbb{R}.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3f}{4-f}$.

$$\frac{3f}{4-f} \leq f \Leftrightarrow \frac{3f}{4-f} - f \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3f - (4-f)f}{4-f} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3f - 4f + f^2}{4-f} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2 - f}{4-f} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f^2 - f \leq 0$$

car $4-f > 0$ car $f \in]0; 4[$

$$\Leftrightarrow f(f-1) \leq 0$$

ce qui est toujours vrai car $f \in]0; 4[$ donc $f-1 < 0$.

Donc $\frac{3f}{4-f} \leq f$.

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 288

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

L'acquisition comprimée

20) a) Soit $(x, y) \in (\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ &\Leftrightarrow xy \leq |x||y| \\ &\text{ce qui est toujours vrai} \end{aligned}$$

Donc $\forall (x, y) \in (\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}))^2$, $|x+y| \leq |x| + |y|$

• Soit $x_1, \dots, x_r$ des éléments de $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

$$\sum_{i=1}^r x_i = \sum_{i=1}^a x_i + \sum_{i=a+1}^r x_i, \quad a \in \{1; r\}.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \left| \sum_{i=1}^r x_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^a x_i + \sum_{i=a+1}^r x_i \right| && \left. \begin{array}{l} \text{par inégalité} \\ \text{triangulaire} \end{array} \right\} \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^a x_i \right| + \left| \sum_{i=a+1}^r x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^a |x_i| + \sum_{i=a+1}^r |x_i| && \left. \begin{array}{l} \text{par inégalité} \\ \text{triangulaire} \end{array} \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^r |x_i|. \end{aligned}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc, pour tous $x_1, \dots, x_r$ éléments de $\mathcal{U}_{n-1}(\mathbb{R})$,

$$\left| \sum_{i=1}^r x_i \right| \leq \sum_{i=1}^r |x_i|$$

FIN.

