

Copie anonyme - n°anonymat : 853616



D9-00288
853616
Mat2 Appli

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Résultats généraux

1) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P_k: P(\bigcup_{i=1}^k B_i) \leq \sum_{i=1}^k P(B_i)$

① Initialisation $k=1$

$$P(\bigcup_{i=1}^1 B_i) = P(B_1) = \sum_{i=1}^1 P(B_i) \quad \text{Donc } P(\bigcup_{i=1}^1 B_i) \leq \sum_{i=1}^1 P(B_i)$$

Donc P_1 est vraie et P_k est initialisée

② Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que P_k est vraie

Montrons que P_{k+1} est vraie, $P_{k+1}: P(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i) \leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i) = P((\bigcup_{i=1}^k B_i) \cup B_{k+1})$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^k B_i) + P(B_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^k P(B_i) + P(B_{k+1}) - P(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i) - P(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}) \quad \text{car } P(\bigcup_{i=1}^k B_i \cap B_{k+1}) \geq 0$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k+1} P(B_i)$$

} par formule
du crible.

} par hypothèse
de récurrence

donc P_{k+1} est vraie et P_k est héréditaire

③ Conclusion

P_k est initialisée et héréditaire donc vraie pour toutes valeurs de k , par principe de récurrence.

$$\text{Donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^k P(B_i)$$

2) a) $t \mapsto 1 - \theta + \theta e^t \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ par somme et produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (dont $t \mapsto e^t$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$)

Par ailleurs, $\forall t \in \mathbb{R}, e^t > 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \theta e^t > 0$

d'où $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - \theta e^t \geq \frac{1}{2}$, d'où $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - \theta + \theta e^t > 0$,

donc $t \mapsto 1 - \theta + \theta e^t$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Sachant

que $t \mapsto \ln(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, par composition,

$$t \mapsto \ln(1 - \theta + \theta e^t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

• $t \mapsto \frac{t}{4} + \theta \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ en tant que fonction polynôme.

• Par somme, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

Par propriété, f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{t}{4} + \theta - \frac{\theta e^t}{1 - \theta + \theta e^t}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = \frac{1}{4} - \frac{\theta e^t(1 - \theta + \theta e^t) - \theta e^t \times \theta e^t}{(1 - \theta + \theta e^t)^2}$$

$$= \frac{(1 - \theta + \theta e^t)^2 - 4(\theta e^t(1 - \theta + \theta e^t) - \theta e^{2t})}{4(1 - \theta + \theta e^t)^2}$$

$$= \frac{(1-\theta+\theta e^t)^2 - 4\theta e^t(1-\theta+\theta e^t - \theta e^t)}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

$$= \frac{1-2\theta+\theta^2+2(1-\theta)\theta e^t+(\theta e^t)^2-4\theta e^t+4\theta^2 e^t}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

$$= \frac{1-2\theta+\theta^2+2\theta e^t-2\theta^2 e^t+\theta^2 e^{2t}-4\theta e^t+4\theta^2 e^t}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

$$= \frac{1-2\theta+\theta^2-2\theta e^t+2\theta^2 e^t+\theta^2 e^{2t}}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

$$= \frac{(1-\theta-\theta e^t)^2}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$$

✓ par identité remarquable

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \frac{(1-\theta-\theta e^t)^2}{4(1-\theta+\theta e^t)^2}$

b) Sachant que $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0$ (en fait que quotient de nombres au carré), f est convexe sur $\mathbb{R}$. Donc par définition, la courbe représentative de f est toujours au-dessus de sa tangente, en particulier sa tangente en $0, (t_0)$

$$\text{Or } (t_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\text{Or } f'(0) = \frac{0}{4} + \theta - \frac{\theta e^0}{1-\theta+\theta e^0} = \theta - \theta = 0$$

$$\text{et } f(0) = \frac{0^2}{8} + \theta \times 0 - \ln(1-\theta+\theta e^0) = 0$$

$$\text{Donc } (t_0): y = 0$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) > 0$

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{8} + \theta t - \ln(1 - \theta + \theta e^t) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2}{8} > \ln(1 - \theta + \theta e^t) - \theta t$$

par suite
croissance de
 $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{8}} > e^{\ln(1 - \theta + \theta e^t) - \theta t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{8}} > (1 - \theta + \theta e^t) \times e^{-\theta t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{8}} > e^{-\theta t} (1 - \theta) + \theta e^{-\theta t + t}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t^2}{8}} > (1 - \theta) e^{-\theta t} + \theta e^{(1 - \theta)t}$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, (1 - \theta) e^{-\theta t} + \theta e^{(1 - \theta)t} \leq e^{\frac{t^2}{8}}$

3) a) La fonction $t \mapsto e^t$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$
et $\forall t \in \mathbb{R}, (e^t)'' = e^t$, or $\forall t \in \mathbb{R}, e^t > 0$.
Donc par propriété, $t \mapsto e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$

b) Soit $x \in [-\theta, 1 - \theta]$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

• sachant que X est à valeurs dans $[-\theta, 1-\theta]$, sa densité est nulle sauf sur le segment $[-\theta, 1-\theta]$. De plus, la fonction $x \mapsto e^{tx} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ par composition. Ainsi, par formule de transfert, e^{tx} admet une espérance.

• sachant que X admet une espérance, par linéarité de l'espérance, $E(X+\theta)$ et $E(1-\theta+X)$ existent et $E(X+\theta) = E(X) + \theta = \theta$ et $E(1-\theta+X) = E(X) + 1-\theta = 1-\theta$.

Ainsi, par linéarité de l'espérance, $(\theta+x)e^{(1-\theta)t} + (1-\theta-x)e^{-\theta t}$ admet une espérance et : $E((\theta+x)e^{(1-\theta)t} + (1-\theta-x)e^{-\theta t}) = e^{(1-\theta)t}\theta + (1-\theta)e^{-\theta t}$.

d'après 3)b), et par croissance de l'espérance,

$E(e^{tx}) \leq E((\theta+x)e^{(1-\theta)t} + (1-\theta-x)e^{-\theta t})$
d'où $E(e^{tx}) \leq e^{(1-\theta)t}\theta + (1-\theta)e^{-\theta t}$ d'après 2)b)
donc $E(e^{tx}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, E(e^{tx}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$

5) a) soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n X_u.$$

• Les variables $(X_u)_{u \in \{1, \dots, n\}}$ ^{sont} indépendantes et admettent toute une espérance. Par linéarité de l'espérance, $\bar{X}_n$ admet une espérance et :

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n E(X_u)$$

$$= \frac{1}{n} n \mu$$

$$= \mu.$$

Donc $E(\bar{X}_n) = \mu$.

• Sachant que les $(X_u)_{u \in \{1, \dots, n\}}$ sont à valeurs positives, par positivité de l'espérance, $\mu \geq 0$.
D'où $\mu + \varepsilon > 0$.

$$\bullet P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) = P(\bar{X}_n \geq \varepsilon + \mu)$$

$\bar{X}_n$ admet une espérance et $\varepsilon + \mu > 0$ donc par inégalité de Markov.

$$P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\bar{X}_n)}{\mu + \varepsilon}$$

$$\text{d'où } P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu}{\mu + \varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \bullet E(e^{t(\bar{X}_n - \mu)}) &= E(e^{t\bar{X}_n} e^{-t\mu}) \\ &= E(e^{t\bar{X}_n} x e^{-t\mu}) \\ &= e^{-t\mu} \times E(e^{t\bar{X}_n}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ par linéarité de l'espérance.}$$

je n'about pas...

$$\begin{aligned} \bullet \frac{E(e^{t(\bar{X}_n - \mu)})}{e^{t\mu}} &= e^{-t\mu} E(e^{t(\bar{X}_n - \mu)}) \\ &= e^{-t\mu} \times E(e^{t(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu)}) \\ &= e^{-t\mu} \times E(e^{\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n X_k} e^{-t\mu}) \\ &= e^{-t\mu} \times e^{-t\mu} \times E(e^{t \sum_{k=1}^n X_k}) \\ &= e^{-t\mu} \times e^{-t\mu} \times E(\prod) \end{aligned}$$

je n'about pas....

b) Soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} e^{-t\epsilon} \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}(X_u - \mu)}\right) &= e^{-t\epsilon} \times \prod_{u=1}^n \bar{e}^{\frac{t\mu}{n}} E\left(e^{\frac{t}{n}X_u}\right) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= e^{-t\epsilon} \times \left(\bar{e}^{-\frac{t\mu}{n}}\right)^n \times \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}X_u}\right) \\ &= e^{-t\epsilon} \times e^{-t\mu} \times \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}X_u}\right) \\ &= e^{-t(\epsilon + \mu)} \times \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}X_u}\right) \end{aligned}$$

Si on prend $\mu = 0$, alors $\forall u \in \{1, \dots, n\}, E(X_u) = 0$,
donc on peut appliquer le résultat de la question 4. (car les $(X_u)_{u \in \{1, \dots, n\}}$ sont à valeurs dans $(0, 1] \subset (-\theta, +\theta)$)

On a alors:

$$\begin{aligned} e^{-t\epsilon} \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}(X_u - \mu)}\right) &= e^{-t\epsilon} \times \prod_{u=1}^n E\left(e^{\frac{t}{n}X_u}\right) \\ &\leq e^{-t\epsilon} \times \left(e^{\left(\frac{\epsilon}{n}\right)^2}\right)^n \\ &\leq e^{-t\epsilon} \times e^{\frac{t^2}{8n}} \\ &\leq e^{-t\epsilon + \frac{t^2}{8n}} \end{aligned}$$

donc, d'après la question 5a) et par transitivité,

$$\underline{\forall t \in \mathbb{R}_+, P(\bar{X}_n - \mu \geq \epsilon) \leq e^{-t\epsilon + \frac{t^2}{8n}}}$$

• On cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que $-t\epsilon + \frac{t^2}{8n} = -2n\epsilon^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -t\epsilon + \frac{t^2}{8n} = -2n\epsilon^2 &\Leftrightarrow -t\epsilon + \frac{t^2}{8n} + 2n\epsilon^2 = 0 \\ &\quad (E) \end{aligned}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$(E) \Leftrightarrow -8nt\varepsilon + t^2 + 16n^2\varepsilon^2 = 0 \quad \text{car } 8n \neq 0.$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 8n\varepsilon t + 16n^2\varepsilon^2 = 0$$

$$\Delta = (-8n\varepsilon)^2 - 4 \times 16n^2\varepsilon^2$$
$$= 64n^2\varepsilon^2 - 64n^2\varepsilon^2$$
$$= 0$$

$$\Delta = 0.$$

$$\text{Donc } (E) \Leftrightarrow t = -\frac{-8n\varepsilon}{2},$$

$$\Leftrightarrow t = 4n\varepsilon$$

Donc, pour $t = 4n\varepsilon$, on a $P(\bar{X}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$

6) Considérons $\overline{1-X_n} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n (1-X_u)$, avec $E(\overline{1-X_n}) = \mu$.

d'après la 5)b), $P(\overline{1-X_n} - (1-\mu) \geq \varepsilon) \leq e^{-2n\varepsilon^2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

71

Utilisation d'une table SQL

- a) SELECT Action FROM Bandit WHERE Numero = 10
- b) SELECT Numero FROM Bandit WHERE Action = 2 AND Recompense = 0
- c) SELECT COUNT(Action) FROM Bandit WHERE Action = 1 AND Numero < 101
- d) SELECT 1/(SELECT COUNT(Action) FROM Bandit WHERE Action = 2 AND Numero < n+1) * (SELECT SUM(SELECT Recompense FROM Bandit WHERE Action = 2). WHERE Numero < n+1)

La stratégie ETC est une modification du regret moyen

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

a) Y_j est égale à la récompense pour la j -ième action. Sachant que la récompense est aléatoirement choisie entre 0 et 1, car $(X_{i,j})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ (qui est égal à la récompense aléatoire pour l'action i , lorsque celle est effectuée pour la j -ième fois) suit une loi de Bernoulli. Donc $Y_j(\omega) \in \{0; 1\}$.

Ainsi, $E(Y_j) = P(Y_j = 1)$.

En considérant le système complet d'événements $(\llbracket I_j = i \rrbracket)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ par formule des probabilités totales, il vient que :

$$P(Y_j = 1) = \sum_{i=1}^n P(\llbracket Y_j = 1 \rrbracket \cap \llbracket I_j = i \rrbracket)$$

Donc $E(Y_j) = \sum_{i=1}^r P(Y_j=1 \cap I_j=i)$

b) Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

En considérant le système complet d'événements $([X_{i,k}=1] \cap [N_{i,j}=k])_{k \in \llbracket 1, s \rrbracket}$, par formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(Y_j=1 \cap I_j=i) &= \sum_{k=1}^s P([X_{i,k}=1] \cap [I_j=i] \cap [N_{i,j}=k] \cap [Y_j=1]) \\ &= \sum_{k=1}^s P([X_{i,k}=1] \cap [I_j=i] \cap [N_{i,j}=k]) \end{aligned}$$

car $[Y_j=1] = [X_{i,k}=1] \cap [N_{i,j}=k]$, pour tout k autre 1 et j .

Donc $P(Y_j=1 \cap I_j=i) = \sum_{k=1}^s P([X_{i,k}=1] \cap [I_j=i] \cap [N_{i,j}=k])$

$$\begin{aligned} c) \bullet E(Y_j) &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^s P([X_{i,k}=1] \cap [I_j=i] \cap [N_{i,j}=k]) \right) \quad \text{par lemme des wallons} \\ &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^s P([X_{i,k}=1] \cap [N_{i,j}=k]) P(I_j=i) \right) \quad \text{par formule des probabilités totales en considérant le système complet d'événements } ([N_{i,j}=k])_{k \in \llbracket 1, s \rrbracket} \\ &= \sum_{i=1}^r p_i P(I_j=i) \end{aligned}$$

Donc $E(Y_j) = \sum_{i=1}^r p_i P(I_j=i)$

• Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. on a $p_i \leq p^*$ donc, sachant que $P(I_j=i) > 0$, $p_i P(I_j=i) \leq p^* P(I_j=i)$. Par passage à la somme, $\sum_{i=1}^r p_i P(I_j=i) \leq \sum_{i=1}^r p^* P(I_j=i)$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\alpha \sum_{i=2}^{\infty} p^{\alpha} P(I_j=i) = p^{\alpha} \sum_{i=2}^{\infty} P(I_j=i) \\ = p^{\alpha} \quad \checkmark \text{ car } \sum_{i=2}^{\infty} P(I_j=i) = 1$$

Pour $E(Y_j) < p^{\alpha}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$.

$N_{i;n}(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

En considérant le système complet d'événements $([I_n=j])_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket}$, par formule des probabilités totales.

$$P(N_{i;n}=k) = \sum_{j=1}^r P([I_n=j] \cap [N_{i;n}=k])$$

Sachant que $N_{i;n}(\Omega)$ est fini, $N_{i;n}$ admet une espérance et :

$$E(N_{i;n}) = \sum_{k=0}^n k P(N_{i;n}=k) \\ = \sum_{k=0}^n k \sum_{j=1}^r P([I_n=j] \cap [N_{i;n}=k])$$

je n'ai abouti pas...

b) $\Delta_n = np^\Phi - R_n$.

- $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ admettent toutes une espérance, donc par linéarité de l'espérance R_n aussi et.

$$\begin{aligned} E(R_n) &= \sum_{j=1}^n E(Y_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i P(I_j=i) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après 3)c)} \end{array} \right\}$$

- Par linéarité de l'espérance, Δ_n admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(\Delta_n) &= np^\Phi - E(R_n) \\ &= np^\Phi - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_i P(I_j=i) \\ &= np^\Phi - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i P(I_j=i) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car on somme} \\ \text{sur un} \\ \text{rectangle} \end{array} \right\} \\ &= np^\Phi - \sum_{i=1}^n \left(p_i \left(\sum_{j=1}^n P(I_j=i) \right) \right) \end{aligned}$$

$$= np^0 - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n})$$

$$\begin{aligned} \propto \sum_{i=1}^{\hat{n}} f_i E(N_{i,n}) &= \sum_{i=1}^{\hat{n}} (p^0 - p_i) E(N_{i,n}) \\ &= \sum_{i=1}^{\hat{n}} p^0 E(N_{i,n}) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par} \\ \text{linéarité de} \\ \text{la somme} \end{array} \right\} \\ &= p^0 \times \sum_{i=1}^{\hat{n}} \sum_{j=1}^{\hat{n}} P(I_j = i) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n}) \\ &= p^0 \times \sum_{j=1}^{\hat{n}} \sum_{i=1}^{\hat{n}} P(I_j = i) - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car on} \\ \text{somme} \\ \text{sur un} \\ \text{rectangle} \end{array} \right\} \\ &= p^0 \times \sum_{j=1}^{\hat{n}} 1 - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n}) \\ &= np^0 - \sum_{i=1}^{\hat{n}} p_i E(N_{i,n}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(\Delta n) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} f_i E(N_{i,n})$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^0$. Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$I_j \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; r \rrbracket).$$

$$\text{Donc } \forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, P(I_j = k) = \frac{1}{r}$$

$$\text{D'où } E(N_{i,n}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n 1 = \frac{n}{r} \quad \text{d'après 1)a)}$$

$$\text{Donc d'après 1)b), } E(\Delta n) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} f_i \frac{n}{r}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, E(\Delta n) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} f_i \frac{n}{r}$$

12) Soit $w \in \mathcal{R}$.

$$\bullet \hat{X}_{1,6}(w) = \begin{cases} \frac{1}{N_{1,6}(w)} \times \sum_{k=1}^{N_{1,6}(w)} X_{1,k}(w) & \text{si } N_{1,6}(w) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or $N_{1,6}(w) = 2$ car il y a deux 1 sur la ligne de $I_j(w)$ entre la colonne 1 et la colonne 6.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \hat{X}_{1,6}(w) &= \frac{1}{2} \times (X_{1,1}(w) + X_{1,2}(w)) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } [X_{1,1}(w)=1] \cap [X_{1,2}(w)=1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } ([X_{1,1}(w)=1] \cap [X_{1,2}(w)=0]) \cup ([X_{1,1}(w)=0] \cap [X_{1,2}(w)=1]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet X_{2,6}(w) =$$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

13) def Python $Z(m, n, Rec)$:

14) a) $N_{i,m,r}$ est égal au nombre d'indices $k \in [1, m, r]$ tels que $I_k = i$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

de variables $(X_{i,j})_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$ sont des variables aléatoires

indépendantes, à valeurs dans $\{0, 1\}$, qui suivent une loi de Bernoulli, et de même espérance p_i .
De plus, $\overline{X_{i,m}} = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m X_{i,u}$

On peut donc appliquer à $\overline{X_{i,m}}$ l'inégalité de Hoeffding, démontrée en 5).

$$\text{On a } P(\overline{X_{i,m}} - p_i \geq \varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2} \\ \text{et } P(\overline{X_{i,m}} - p_i \leq -\varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}$$

Or, d'après 14a), $\hat{X}_{i,mr} = \overline{X_{i,m}}$

$$\text{Donc } \underline{P(\hat{X}_{i,mr} - p_i \geq \varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}} \quad \text{et} \quad \underline{P(\hat{X}_{i,mr} - p_i \leq -\varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}}$$

15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

a) d'après 10a),

$$\begin{aligned} E(N_{i,n}) &= \sum_{j=1}^n P(I_j = i) \\ &= \sum_{j=2}^m P(I_j = i) + \dots + \sum_{j=mr}^n P(I_j = i) \\ &= \sum_{j=1}^m 1 + \dots + \sum_{j=mr}^n P(Z_m = i) \\ &= m + (n - mr) P(Z_m = i) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{E(N_{i,n}) = m + (n - mr) P(Z_m = i)}$$

Pour l'interprétation de l'énoncé, $[Z_m = i]$ est réalisé lorsque i est le plus petit indice k pour lequel $\hat{X}_{k, mr}(w) = \max_{1 \leq k \leq r} \hat{X}_{k, mr}(w)$.

D'où que $[Z_m = i] \subset [\hat{X}_{i, mr} \geq X_{s, mr}]$

Ainsi, par croissance de la probabilité,

$$P(Z_m = i) \leq P(\hat{X}_{i, mr} \geq X_{s, mr})$$

D'où $E(N_{i, m}) \leq m + (n-r) P(\hat{X}_{i, mr} \geq \hat{X}_{s, mr})$

b)

c) d'après 14) b),

$$\bullet P(\hat{X}_{i, mr} - p_i \geq \frac{\delta_i}{2}) \leq e^{-2m \times (\frac{\delta_i}{2})^2} \quad \text{donc } P(\hat{X}_{i, mr} - p_i \geq \frac{\delta_i}{2}) \leq e^{-m \delta_i^2}$$

$$\bullet P(p_s - \hat{X}_{s, mr} \geq \frac{\delta_i}{2}) = P(\hat{X}_{s, mr} - p_s \leq -\frac{\delta_i}{2}) \leq e^{-m \delta_i^2}$$

Donc, d'après 15) b), et par somme :

$$P(\hat{X}_{i, mr} \geq \hat{X}_{s, mr}) \leq 2e^{-m \delta_i^2}$$

Ainsi, d'après 15)a) et par somme et produit,

$$E(N_{i,n}) \leq m + 2(n - mr) e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}$$

De plus, $m + 2(n - mr) e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}} \leq m + 2n e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}$
car $mr < n$ d'après l'énoncé.

$$\text{Donc } \underline{E(N_{i,n}) \leq m + 2(n - mr) e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}} \leq m + 2n e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}}$$

16)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Soit $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$

d'après 15)b)

$$E(\Delta_n) = \sum_{i=1}^r \delta_i E(N_{i,n})$$

Or d'après 15)c), $E(N_{i,n}) \leq m + 2n e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}$

d'où $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \delta_i E(N_{i,n}) \leq \delta_i (m + 2n e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}})$

car $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \delta_i > 0$ car $\forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, p^* > p_i$

Par passage à la somme,

$$\sum_{i=1}^r \delta_i E(N_{i,n}) \leq \sum_{i=1}^r \delta_i (m + 2n e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}})$$

d'où $E(\Delta_n) \leq m \sum_{i=1}^r \delta_i + 2n \sum_{i=1}^r \delta_i e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}$ par linéarité de la somme

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, E(\Delta_n) \leq m \sum_{i=1}^r \delta_i + 2n \sum_{i=1}^r \delta_i e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}$$

b) Soit $h: x \mapsto e^{-x} - \frac{1}{xe}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto xe \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc par quotient, $x \mapsto \frac{1}{xe} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. Par composition,

$x \mapsto e^{-x} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. Donc par somme $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

Copie anonyme - n°anonymat : 853616

Code épreuve : 287

Nombre de pages : 24

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques 2 appliquées

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Soit h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = -e^{-x} + \frac{e}{(xe)^2}$$

$$= \frac{-e^{-x} + \frac{e}{(xe)^2}}{(xe)^2}$$

$$= \frac{e(-ex^2e^{-x} + 1)}{(xe)^2}$$

Je n'aboutis pas, on admet que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{-x} < \frac{1}{xe}$ (*)

d'après 16a), $E(A_n) \leq \underbrace{m \sum_{i=2}^n \delta_i}_A + \ln \underbrace{\sum_{i=2}^n \delta_i e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}}}_B$

• $A = m \alpha$ car $\alpha = \sum_{i=2}^n \delta_i$

• d'après (*), on pose $i \in \{1, \dots, n\}$, $e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}} \leq \frac{1}{m \frac{\delta_i^2}{2} x e}$

donc $e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}} \leq \frac{2}{m \delta_i^2}$ donc $\delta_i e^{-m \frac{\delta_i^2}{2}} \leq \frac{2}{m \delta_i}$

Par passage à la somme et par produit $\forall n \geq 0$,

$$B \leq 2n \times \sum_{i=2}^n \frac{2}{me_i}$$

$$\text{d'où } B \leq \frac{4n}{me} \sum_{i=2}^n \frac{1}{8i}$$

$$\text{d'où } B \leq \frac{4n}{e} \times \frac{B}{m}$$

$$\text{or } 2n - \frac{4n}{e} = \frac{2ne - 4n}{e} = \frac{2n(e-2)}{e} > 0 \quad \text{car } e-2 > 0$$

D'où, par produit et transitivité,

$$B \leq 2n \times \frac{B}{m}$$

$$\text{Ainsi, par somme, } E(D_n) \leq md + 2n \times \frac{B}{m}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, E(D_n) \leq md + 2n \frac{B}{m}$$

La stratégie UCB² et une majoration de son regret

18) a) soit $i \in \llbracket 1:r \rrbracket$.

b)

```
def PythonBernoulli(p):  
    return rd.binomial(p)
```

Alternative, sans la commande rd.binomial(p)

```
def PythonBernoulli(p):  
    r = rd.random()  
    if r <= p:  
        return 1  
    else:  
        return 0
```

c)

```
def maj(hatX, N, i, P):  
    j = i - 1  
    r = len(P)  
    if 1 <= j <= r:  
        return j  
    else:
```

```

c) def maj (hat X, N, i, P):
    j = i - 1
    r = np.shape(P)[0]
    if 1 <= i <= r:
        return j
    else:
        n = 2
        u = hat X +

```

je n'aboutis pas....

13) for j in range(r+1, n+1):

FIN