

Copie anonyme - n°anonymat : 467717



D9-00088

467717

Mat Appro

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de :

Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1 :

Partie 1.

1) On remarque que

$\text{rg}(A) = 1 < 2$ car les deux colonnes sont colinéaires (égales) et non nulles.

Donc $0 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = 1$.

On : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

Donc : $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

De plus, $\text{rg}(A - 2I_2) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = 1 < 2$ car les deux colonnes sont colinéaires non nulles.

Donc : $2 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim(E_2(A)) = 1$.

On : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_2(A)$

Donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

A est symétrique donc A est diagonalisable avec $\text{Sp}(A) = \{0, 2\}$.

Abs : $\exists Q \in \text{GL}(\mathbb{R})$, $A = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t Q$ car A est une matrice symétrique d'un endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ orthogonale.

De plus, on a $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = Q D^t Q$

1/24

2)a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{x(x+y)}{x^2+y^2} + \frac{y(x+y)}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Donc: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}, \varphi(x, y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$

φ est alors la somme et le produit de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

Donc $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\})$

2)b) Comme $\varphi \in \mathcal{C}^2((\mathbb{R}^*)^2)$, φ est dérivable.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\},$

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \frac{2y(x^2+y^2) - 2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_2 \varphi(x, y) = \frac{2x(x^2+y^2) - 2y(2xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

On cherche alors les points critiques de φ i.e les points (x, y) tel que

$$\begin{cases} 2y^3 - 2xz y = 0 \\ 2x^3 - 2y^2 x = 0 \end{cases} \quad \text{car } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}, (x^2+y^2)^2 > 0$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y^3 = yx^2 \\ x^3 = y^2 x \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} y^2 = x^2 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

car $y \neq 0$ donc on peut diviser par y
et de même pour x

Donc: l'ensemble des points critiques de φ est l'ensemble suivant

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\} \mid x^2 = y^2\}$$

2) c) D'après la question 2) a), pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}, \varphi(\alpha x; \alpha y) = 1 + \frac{2\alpha x \alpha y}{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2}$$

$$= 1 + \frac{\alpha^2}{\alpha^2} \times \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$= 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \varphi(x,y)$$

Donc, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}, \varphi(\alpha x; \alpha y) = \varphi(x,y)$

2) d)

Partie 2

3) a) On note $C = (c_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2}$ la matrice $B^t B$
 et $D = (d_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1;m \rrbracket^2}$ la matrice ${}^t B B$.

Alors :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk}$$

et

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;m \rrbracket^2, d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} b_{kj}$$

3) b) $\text{tr}({}^t B B) = \sum_{i=1}^m d_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n b_{ki}^2$$

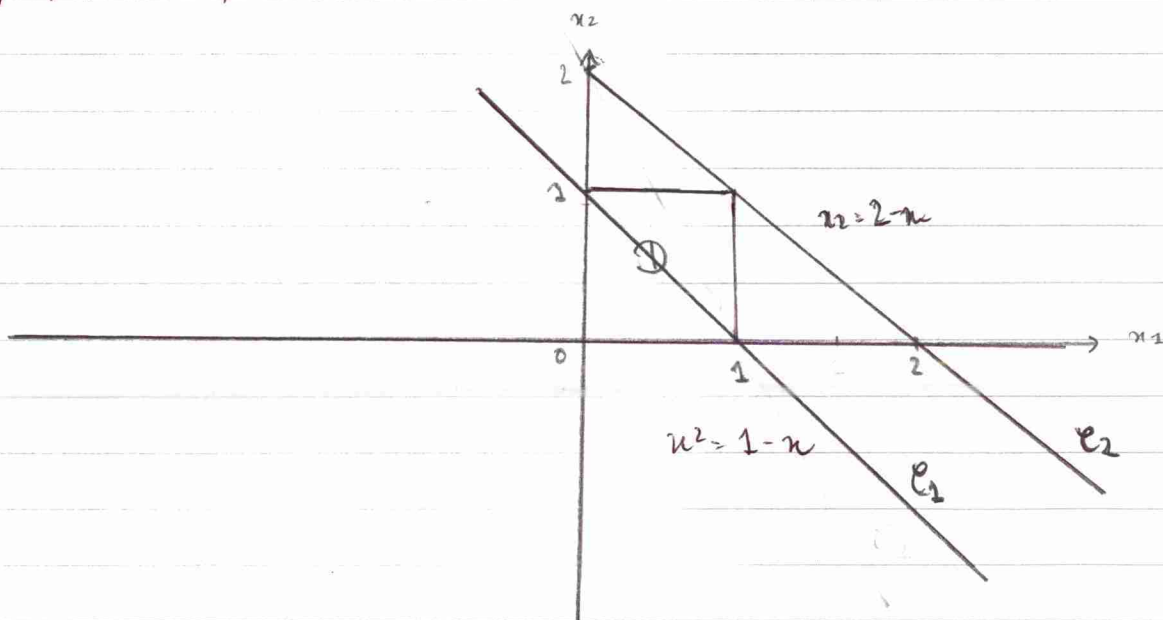
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ki}^2$$

$$= \sum_{k=1}^n c_{kk}$$

$$= \text{tr}(B^t B).$$

Donc $\boxed{\text{tr}(B^t B) = \text{tr}({}^t B B)}$

4) Pour $n=2$, on a :



Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de :

Mathématiques approfondies.

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) Soit $k \in (\mathbb{Z}, n)$. On sait que $D \cap C_k$ est un fermé borné.
Or, par fonction polynomiale, f_1 est une fonction continue
sur D et donc sur $D \cap C_k$.

Donc f_1 admet un maximum global sur D sous la contrainte C_k

Ce maximum est forcément atteint sur les bords car f_1 n'admet
pas de point critique (sinon cela reviendrait à dire que $(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$
sur l'intérieur.

Donc pour tout $i \in (\mathbb{Z}, n)$, $\lambda_i \geq 0$, on prend $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
 $\downarrow$
 i -ème

6) π est une projection de $\mathbb{R}^n$ donc $\mathbb{R}^n = \text{Im}(\pi) \oplus \text{Ker}(\pi)$.
On note B une base adaptée à cette décomposition.

Alors

$\text{Mat}_B(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 1 & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$ avec autant de 1 que
 $\dim(\text{Im}(\pi)) = \text{rg}(\pi)$.

Donc, on a que $\text{rg}(\pi) = \text{tr}(\text{Mat}_B(\pi)) = \text{rg}(\text{Mat}_B(\pi))$.

Donc: en sachant que le rang et la trace sont des invariants
par changement de base et que P et $\text{Mat}_B(\pi)$ sont semblables
par changement de base, on a:

$$\text{rg}(P) = \text{rg}(\text{Mat}_B(\pi)) = \text{tr}(\text{Mat}_B(\pi)) = \text{tr}(P).$$

Donc, finalement $\text{rg}(P) = \text{tr}(P)$

6) b) On suppose que π est une projection orthogonale sur un espace F .

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|^2 = \|\underbrace{x - \pi(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{\pi(x)}_{\in F}\|^2$$

Par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2 \quad \text{car } \|x - \pi(x)\|^2 \geq 0$$

Donc, par application de la racine carrée et positivité de la norme,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq \|\pi(x)\|}$$

6) c) On note $C = (e_1; \dots; e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On: $\forall i \in [2; n]$, $\|e_i\| = 1$, car la base est orthonormée.

Ainsi, $\forall i \in [2; n]$, $\|\pi(e_i)\| \leq 1$, si π est orthogonale d'après la question précédente.

Donc: $\forall i \in [2; n]$, $0 \leq p_{ii} \leq 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, si } \pi \text{ est orthogonale } \forall i \in [2; n], p_{ii} \in [0; 1]}$$

7) A est une matrice symétrique donc diagonalisable.

On note $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant. De plus A est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique orthonormée. Alors, pour penser à la base des vecteurs propres, la matrice de passage est une matrice orthogonale.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \exists Q \in \text{O}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ tel que } A = Q D^t Q}$$

$$8) \quad \pi \pi = \begin{pmatrix} - & c_1 & - \\ & \vdots & \\ - & c_k & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ | & | & & | \\ & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \dots \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc: $\boxed{^t\pi\pi = I_k}$ car les colonnes forment une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

9) On sait que A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1\}$.

Alors, on sait que $A = \lambda_1 I_n$.

Alors, par linéarité de la trace,

$$\begin{aligned}\text{tr} (^t\pi A \pi) &= \text{tr} (^t\pi \lambda_1 I_n \pi) \\ &= \lambda_1 \text{tr} (^t\pi \pi) \\ &= \lambda_1 \text{tr} (I_k)\end{aligned}$$

Dans ce cas, $\boxed{\text{tr} (^t\pi A \pi) = \lambda_1 k}$

10) a) $P^2 = X^t X X^t X$

$$= {}^t Q \pi^t \pi Q {}^t Q \pi {}^t \pi Q$$

$$= {}^t Q \pi {}^t \pi I_n \pi {}^t \pi Q$$

$$= {}^t Q \pi^t \pi Q$$

$$= P.$$

↓ car $Q^t Q = I_n$ car Q est
orthogonale
↙ car ${}^t \pi \pi = I_k$

Donc P est la matrice d'une projection.

De plus, ${}^t P = P$. P est symétrique. Donc P est la matrice symétrique d'une projection dans une base ortho-normée.

Donc $\boxed{P \text{ est la matrice d'une projection orthogonale de } \mathbb{R}^n}$.

10) b) On procède par double induction

[C] Soit $Y \in \text{Ker}(P)$. tel que $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors: $X^t X Y = 0_{\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})}$

$$\Rightarrow {}^t Y X^t X Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow \|{}^t X Y\| = 0 \quad \downarrow \text{par séparabilité de la norme}$$

$$\Rightarrow {}^t X Y = 0$$

Donc $\underline{Y \in \text{Ker}({}^t X)}$

[D] Soit $Y \in \text{Ker}({}^t X)$. avec $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors: ${}^t X Y = 0_{\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})}$

$$\Rightarrow X^t X Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow P Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Donc $\underline{Y \in \text{Ker}(P)}$

Par double inclusion,

$$\boxed{\text{Ker}(P) = \text{Ker}({}^tX)}$$

$$\begin{aligned} \text{rg}(P) &= n - \dim(\text{Ker}(P)) \quad \text{par le théorème du rang} \\ &= n - \dim(\text{Ker}({}^tX)) \quad \text{et identification avec les endomorphismes} \\ &= n - (n - k) \\ &= k. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{rg}(P) = k}$$

$$10)c) \quad \text{tr}({}^tPAP) = \text{tr}({}^tPQD{}^tQP)$$

or pour toutes matrices A, B tel que les produits AB et BA sont écrites, on sait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

$$\text{Donc: } \text{tr}({}^tPQD{}^tQP) = \text{tr}({}^tQD{}^tPQ) \\ = \text{tr}(PD).$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{tr}({}^tPAP) = \text{tr}(PD)}$$

On remarque que pour $C = (c_{ij})_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, n\}}}$ tel que $C = PD$,
 $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, c_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ik} d_{kj}$

avec les (p_{ij}) et les (d_{ij}) étant les coefficients de P et D .

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \text{tr}(PD) &= \sum_{i=1}^n c_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ii} d_{ii} \end{aligned}$$

or: d'après la question 6)c), $\forall i \in \{1, \dots, n\}, p_{ii} \in [0, 1]$ et on a $\text{rg}(P) = k$ donc tel que $\sum_{i=1}^n p_{ii} = k$ d'après la question 6)a).

Ainsi, on se retrouve bien dans le cas C6 et D avec $\text{tr}(PD) = \int_1^n (p_{11}, \dots, p_{nn})$

Ainsi, par définition $\text{tr}(PD) = \text{tr}({}^tPAP) \leq \max \{ \int_1^n (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in D \cap \{k\} \}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de :

Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16) a) Supposons alors que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, C_i = V_i$
Alors,

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_n A T_n) &= \text{tr}(T_n Q P T_n) \\ &= \text{tr}(I_n P I_n) \\ &= \text{tr}(P) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

Problème 2.

Partie 1.

1) a) On souhaite montrer que G_W est bien définie sur $(0;1)$.

Ainsi: on montre que la série converge $\forall t \in (0;1)$.

Soit $t \in (0;1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors: $t^n \leq 1$.

Alors: $t^n P(W=n) \leq P(W=n)$

Ainsi: par positivité de la somme avec des termes positifs, on a pour $A \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^A t^n P(W=n) \leq \sum_{n=0}^A P(W=n) \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} P(W=n)}_{\text{converge par définition}} = 1.$$

Donc: $\sum_{n=0}^A t^n P(W=n) \leq 1$.

Donc la suite des sommes partielles est majorée pour tout t dans $(0;1)$. Donc la série converge pour tout $t \in (0;1)$.

Donc, G_W est bien définie sur $(0;1)$

1) b) Soit $(a;b) \in (0;1)^2$ tel que $b > a$.

$$G_W(b) - G_W(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(W=n)}_{\geq 0} \underbrace{(b^n - a^n)}_{\geq 0}$$

car: la fonction $t \mapsto t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et donc sur $(0;1)$).

Donc: par positivité de la somme, $b > a$
 $G_W(b) \geq G_W(a)$.

Donc: G_W est croissante sur $(0;1)$

1) c) G_w est croissante sur $[0;1]$. De plus, $\forall t \in [0;1]$, $G_w(t) \leq 1$ donc G est majorée sur $[0;1]$.

Donc: $\exists l \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} G_w(t) = l$ (sinon G ne serait pas majorée)

$$\text{Ainsi, il existe } l \in \mathbb{R}, \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} G_w(t) = l$$

1) d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Comme $\forall t \in [0;1[$, $\forall P(W=n)t^n \geq 0$, alors

$$\forall t \in [0;1[, \sum_{n=0}^m P(W=n)t^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(W=n)t^n$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ajoute des} & & \\ \text{termes positifs} & \searrow & \\ & & \leq G_w(t) \end{array}$$

De plus, G_w est croissante sur $[0;1]$ donc $\forall t \in [0;1[, G_w(t) \leq G_w(1)$

$$\text{Donc: } \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0;1[, \sum_{n=0}^m t^n P(W=n) \leq G_w(t) \leq G_w(1)$$

On passe alors à la limite en somme finie:

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, on sait que la limite est finie car on a une majoration par $G_w(1)$ qui ne dépend pas de t .

Par passage à la limite,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \sum_{n=0}^m P(W=n)t^n \leq \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t > 1}} G_w(t) \leq G_w(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^m P(W=n) \leq 1 \leq G_w(1)$$

On a pu faire passer la limite par somme finie et par continuité de la fonction $t \mapsto t^n$, on a le terme de gauche.

Le terme du milieu est le résultat de la question précédente.

Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=0}^m P(W=n) \leq l \leq G_W(1)$$

1) e) Comme l'inégalité précédente reste vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a: (par passage à la limite quand $m \rightarrow +\infty$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(W=n) \leq l \leq G_W(1)$$

$$\Rightarrow G_W(1) \leq l \leq G_W(1)$$

$$\Rightarrow l = G_W(1).$$

Donc: $\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} G_W(t) = G_W(1).$

Donc G_W est continue en 1.

1) f) Soit $t \in]0, 1[$. Soit $n \geq 1$.
 $n P(W=n) t^{n-1} \geq 0$.

De plus, $P(W=n) \leq 1$
 $\Rightarrow n t^{n-1} P(W=n) \leq n t^{n-1}$

or, on reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente car $t \in]0, 1[$.

Donc par comparaison de séries à terme général positif,
on a que

$$\forall t \in]0, 1[, \sum_{n \geq 1} n P(W=n) t^{n-1} \text{ converge.}$$

2) a) On sait que $x \mapsto e^x$ est une fonction convexe. Donc, en particulier, elle est au dessus de ses tangentes, notamment en 0. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x \leq \exp(x)$.

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ceci étant vrai sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + (-x) \leq e^{-x}$$

$$\text{Donc, } \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}$$

2) b) D'après l'inégalité précédente,
 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq 1 - e^{-x}$

On : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq n \leq m,$

$$P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq \sum_{k=n}^m P(A_k) \quad \text{par la formule de Boole}$$

En remplaçant x par $\sum_{k=n}^m P(A_k) \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=n}^m P(A_k) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right)$$

Donc : en juxtaposant les deux inégalités,

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq n \leq m \quad P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right)$$

2) c) On suppose que $\sum P(A_n)$ diverge.

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right) = 1$$

Donc : par encadrement,
$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1$$

3) Les $(W_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes de même loi, ce qui signifie que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, W_i est égal en loi à W_1 .

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $\forall (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$P(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = P((W_1 = j_1) \cap (W_2 = j_2) \cap \dots \cap (W_n = j_n))$$

$$P(V_{n,h} = (j_1, j_2, \dots, j_n)) = P((W_h, W_{h+1}, W_{h+2}, \dots)) = (j_1, \dots, j_n)$$

or, par égalité en loi, on a:

$$\begin{aligned} P(V_{n,h} = (j_1, \dots, j_n)) &= P((W_1 = j_1) \cap (W_2 = j_2) \cap \dots \cap (W_n = j_n)) \\ &= P(U_n = (j_1, \dots, j_n)). \end{aligned}$$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $\forall (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$, $P(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = P(V_{n,h} = (j_1, \dots, j_n))$

4) a)

4) b) On sait que $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ convergent et sont à termes positifs donc majorées par leur limite.

Donc: par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k}_{\geq 0} \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right)$$

Donc la suite des sommes partielles est majorée.

Donc

$$\sum_{n \geq 1} c_n \text{ converge.}$$

De plus, comme toutes les sommes convergent dans l'inégalité, on a par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} c_k.$$

Donc:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right) \text{ par encadrement.}$$

Page 2.

5) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\mathbb{E}(X_n)$ existe car X_n est à support fini et

$$\mathbb{E}(X_n) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n)^2 \text{ par König-Huygens (et car } \mathbb{E}(X_n) = 0) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(X_n) = 1$$

5) b) Par linéarité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 0.$$

et par indépendance des $(X_k)_{k \in \{1, n\}}$,

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(S_n) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = n$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Par la formule de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2 \varepsilon}$$

Donc:

$$P(|S_n| \geq n\varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon}$$

Or: soit $\omega \in \Omega$.

$$\omega \in [|S_n| \geq n\varepsilon]$$

$$\Leftrightarrow |S_n(\omega)| \geq n\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{S_n(\omega)}{n} \right| \geq \varepsilon$$

car $n > 0$

$$\Leftrightarrow \omega \in \left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon.$$

$$\text{Donc: } P(|S_n| \geq n\varepsilon) = P\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right)$$

Donc: $\forall \varepsilon > 0,$

$$0 \leq P\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon}.$$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\varepsilon} = 0$ et ce $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{Donc: } \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \varepsilon\right) = 0 \text{ par encadrement.}$$

Donc:

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} X \text{ avec } X \text{ la variable certaine égale à } 0.}$$

7) a) def simul-X():

return (2 * rd.randint(2) - 1)

7) b) def simul-S(n):

$$S = 0$$

for i in range(n)

$$S = S + \text{simul-X}()$$

return(S).

8) Si $n=0$, on prend pour convention qu'une somme vide est nulle. Dans ce cas là, on a $S_0 = 0 - 0 = 0$, ce qui est bien le cas.

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 \sum_{k=1}^n \frac{X_{k+1}}{2} - n = \sum_{k=1}^n (X_{k+1}) - n$$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de :

Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc : $2 \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2} - n = \sum_{k=1}^n x_k + n - n = \sum_{k=1}^n x_k = S_n.$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2} - n$

Donc, avec le cas $n=0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2} - n$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$\left(\frac{x_{k+1}}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P\left(\frac{x_{k+1}}{2} = 0\right) = P\left(\frac{x_{k+1}}{2} = 1\right) = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{x_{k+1}}{2} \subset B(1/2) \forall k \in \mathbb{N}^*$ ou $\frac{x_{k+1}}{2} \subset \mathcal{U}([0, 1])$

9) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. S_n est une somme de n termes impaires.

Si n est pair, alors S_n sera paire et inversement.

Ainsi, si $i \in [-n; n]$, c'est pas de même parité que n , alors i n'est pas de même parité que S_n donc $(S_n = i)$ est un événement impossible.

Donc, pour $i \in [-n; n]$ tel que i et n ne sont pas de même parité, $P(S_n = i) = 0$

9) b) On remarque que $\frac{S_{n+n}}{2} \subset B(n, 1/2)$ car $\frac{S_{n+n}}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{x_{k+1}}{2}$ qui sont n répétitions identiques et indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Donc, si i est de même parité que n , on a :

$P(S_n = i) = P\left(\frac{S_{n+n}}{2} = \frac{i+n}{2}\right)$

Donc $P(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n - \frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+i}{2}}$ avec $\frac{n+i}{2}$ un entier positif.

$$= \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc, si n et i sont de même parité,

$$P(S_n = i) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

10) a) Par la question 9, b) avec 0 pair et $2n$ pair $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi n} \cancel{2^{2n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc: $P(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

10) b) $P(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Donc $P(S_{2n} = 0)$ est équivalent au terme général d'une série de Riemann divergente.

Donc, $\sum_{n \geq 1} P(S_{2n} = 0)$ diverge.

D'après la question 2) c) la probabilité que la marche

aléatoire passe un nombre infini de fois en 0 et de 1.

Donc, la marche aléatoire passe presque sûrement une infinité de fois par 0.

$$\begin{aligned} 11) a) \quad P(T=1) &= P(S_1 > 0) \\ &= P(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(T=1) = \frac{1}{2}$

11) b) Soit $n \geq 2$.

$[T=n]$ est réalisé quand le plus petit entier z tel que $S_z > 0$ est n c'est-à-dire tel que $\forall k \in [1; n-1], S_k \leq 0$ et $S_n > 0$ i.e. $S_n = 1$ car si la somme S_{n-1} est négative, la seule valeur positive que peut prendre S_n est 1.

Donc : $[T=n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} (S_j \leq 0) \right) \cap (S_n = 1)$

11) c) Par la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

$$P(T=n) = P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} S_j \leq 0\right) \cap (S_n = 1)\right)$$

or, pour n pair, l'événement $S_n = 1$ est impossible (9.a)

Donc :

$\forall n \geq 2, P(T=n) = 0$ si n est pair.

12) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

La réalisation de l'événement R_k signifie que les k premières sommes S_i sont inférieures ou égales à -1 et que la somme $S_{k+1} = 0$ i.e. $X_{k+1} = 1$ et $S_k = -1$.

12) b) On remarque à un décalage près entre 0 et -1 or a à peu près la même chose. Pour R_k , la seule condition préalable est que $S_{k+1} = 0$ mais les autres calculs sont égaux, notamment grâce au résultat de la question 3.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } P(R_k) &= P(S_{k+1} = 0) \times P(T=k) \\ &= P(X_{k+1} = 1) \times P(T=k) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \forall t \in \mathbb{N}^*, P(R_n) = \frac{1}{2} P(T=t)$$

12) c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

12) d) On admet le résultat de la question précédente

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$P(T=n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} P(R_n \cap \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - \underbrace{S_{k+1}}_{=0}] \leq 0 \right) \cap [S_{n+1} - \underbrace{S_{k+1}}_{=0} = 1])$$

or: $\omega \in \Omega$ tel que $\omega \in \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - \underbrace{S_{k+1}}_{=0}] \leq 0 \right) \cap [S_{n+1} - \underbrace{S_{k+1}}_{=0} = 1] | R_n$
pour $k \in \{1, n-1\}$.

Alors: $\omega \in \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} - \underbrace{S_{k+1}}_{=0} = 1] | R_n$

Donc $\omega \in \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} = 1]$

Donc $\omega \in \left(\bigcap_{j=1}^{n-k-1} S_j \leq 0 \right) \cap [S_{n+1} = 1]$

car cela revient au même car les X_i sont indépendants et que R_n est réalisé.

Donc: $\omega \in \left[\left(\bigcap_{j=1}^{n-k-1} S_j \leq 0 \right) \cap [S_{n-k} = 1] \right]$ pour les mêmes raisons. Donc $\omega \in (T=n-k)$

$$\text{Donc, } P(T=n+1) = \sum_{k=1}^{n-1} P(R_n) P_{R_n} \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - S_{k+1} \leq 0] \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1] \right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 23

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc: $P(T=n+1) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-1} P(T=h) P(T=n-h)$ par l'équivalent précédent.

De plus, on peut ajouter le terme n de la somme car $P(T=n-n)=0$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

$$P(T=n+1) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n-1} P(T=h) P(T=n-h) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n P(T=h) P(T=n-h)$$

13) a) D'après la question 4. b) $\forall t \in (0; i)$, avec $P(T=0)=0$

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(T=n) t^n \right)}_{\sum a_n} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} P(T=n) t^n \right)}_{\sum b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{h=1}^n P(T=h) P(T=n-h) \right)}_{c_n} t^{n+h} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^n P(T=h) P(T=n-h) \right) t^n$$

Donc: $\forall t \in (0; i)$, $G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^n P(T=h) P(T=n-h) \right) t^n$.

13) b) Soit $t \in (0; i)$.

$$\begin{aligned} t G_T^2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{h=1}^n P(T=h) P(T=n-h) \right) t^{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} P(T=n+1) t^{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} P(T=n) t^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } tG_T^2(t) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) t^n - 2P(T=1)t^2 \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) t \quad \swarrow \text{q. 11.a)} \end{aligned}$$

Donc: $\forall t \in [0, 1], tG_T^2(t) = 2G_T(t) - t$

13) c)

Ainsi, $G_T(1)^2 + 1 = 2G_T(1)$

$$\Rightarrow G_T(2) = G_T(1)^2 = 1.$$

car $G_T^2(1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(T=n) = 1$ par définition des probabilités.

Donc $G_T(1) = 1$.

Donc: $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(T=n) = 1.$

Donc: $T(\Omega)$ est presque sûrement inclus dans $\mathbb{N}$.

Donc $P(T = -1) = 0$.

13) d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

on remarque que $\sum P(W=n) t^n$

14) a) def simul-T():

$n = 0$

while simul-S(n) = < 0:

$n = n + 1$

return (n)

14) b) La fonction mystère calcule la moyenne empirique de T sur T réalisations dans l'attente de faire une approximation d'une potentielle espérance.

On peut, au vu des résultats hasardeux, conjecturer que T n'admet pas d'espérance.

14) c) On remarque que si $E(T)$ existait alors $E(T) = G'(1)$.

Donc, comme $\lim_{t \rightarrow 1} G'(t) = +\infty$, T n'admet pas d'espérance.

FIN

