Copie anonyme - n°anonymat : 467717

D9-00088
467717
Mat Appro

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 27	Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies.

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1.

1) def simul_Z( ):
    X = rd.random()
    Y = rd.random()
    Return (X*Y)

2) X_1 et X_2 sont deux variables qui admettent une espérance.
De plus,
$|Z|^2 \leq 1$. car $Z = X_1 X_2$ et $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [0;1[$.
Donc, par domination, Z admet une espérance et un moment d'ordre 2.
De plus, comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :
$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \frac{1}{9}$

Donc | Z admet une espérance par domination et $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{7}{144}$ par König Huygens. | par le lemme des coalitions

3) a) $X_1(\Omega) = [0;1[$.
Donc $(\ln(X_1))(\Omega) = \mathbb{R}_-$. Donc $Y_1(\Omega) = \mathbb{R}_-$
Donc : $\forall x > 0$, $F(x) = 1$
$\forall x \leq 0$, $F(x) = P(Y_1 \leq x)$
$= P(\ln(X_1) \leq x)$ ↓ par croissance
$= P(X_1 \leq e^x)$ de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.
$= e^x$.

Donc.

$f : x \mapsto \begin{cases} e^x \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$ est la fonction de répartition de Y_2 et de Y_2.

3) b) Une densité de Y_1 et Y_2 est

$g : x \mapsto \begin{cases} e^x \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

4) a) Y_1 et Y_2 sont deux variables indépendantes par le lemme des coalitions.
Alors, on note h une densité de $Y_1 + Y_2$.
$(Y_1 + Y_2)(\Omega) = \mathbb{R}_-$.
Alors, on peut noter que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = 0$
sinon, $\forall x \in \mathbb{R}_-$,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g(x-t) e^t dt$$

$$= \int_{x}^{0} e^{x-t} e^t dt$$

$$= \int_{x}^{0} e^x dt$$

$$= e^x (-x)$$

$$= -xe^x.$$

Donc finalement $h : x \mapsto \begin{cases} -xe^x \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est bien une densité de $Y_1 + Y_2$.

4) b) On sait que $(Y_1+Y_2)(\Omega) = \mathbb{R}_-$.

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\quad H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} -te^t\,dt$$

Alors, on pose $A > 0$. On note u et v les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[-A; x]$ définies telles que

$\forall t \in [-A; x]$, $u(t) = e^t$ et $v(t) = -t$

et $\forall t \in [-A; x]$, $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = -1$.

Ainsi, par intégration par parties sur un fermé,

$$\int_{-A}^{x} u'(t)v(t)\,dt = \left[-te^t\right]_{-A}^{x} + \int_{-A}^{x} e^t\,dt$$

$$= -xe^x + Ae^{-A} + \left[e^t\right]_{-A}^{x}$$

$$= -xe^x + Ae^{-A} + e^x - e^{-A}$$

$$= (1-x)e^x + e^{-A}(A-1)$$

or : par croissances comparées, $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A}(A-1) = 0$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ H(x) = (1-x)e^x$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ H(x) = 1$.

Donc $H : x \mapsto \begin{cases} (1-x)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est la fonction de répartition de Y_1+Y_2.

4) c) $Z(\Omega) =]0;1]$ car $Z = X_1X_2$.

or, on remarque que $Y_1 + Y_2 = \ln(X_1) + \ln(X_2) = \ln(X_1X_2)$.

Donc $Z = e^{Y_1+Y_2}$.

finalement, $\forall x \in]0;1[$,

$f_Z(x) = P(Z \leq x)$

$= P(X_1X_2 \leq x)$

$= P(\ln(X_1X_2) \leq \ln(x))$ ↓ car ln est croissante

$= H(\ln(x))$

$= (1-\ln(x))x$

$\forall x \in]-\infty;0]$, $f_Z(x) = 0$

$\forall x > 1$, $f_Z(x) = 1$.

Donc :

$$f_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ (1-\ln(x))x \text{ si } x \in]0;1] \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc une densité de Z est bien

$$f_Z : x \mapsto \begin{cases} F_Z'(x) \text{ si } x \in]0;1]. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$f_Z : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) \text{ si } x \in]0;1]. \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $]0;1]$. L'intégrale est donc impropre en 0.

On : si on prend $1 > A > 0$. On pose u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ telles que

$\forall t \in [A;1]$, $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

et

$\forall t \in (A;1)$ $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^n$

Alors, par intégration par parties sur un segment,

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes :
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\int_A^1 x^n \ln(t)\,dt = \left[\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\ln(A)\frac{A^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_A^1$$

$$= -\frac{\ln(A)\,A^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{A^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

On : $\lim\limits_{\substack{A\to 0\\ A>0}} -\frac{\ln(A)\,A^{n+1}}{n+1} = 0$ par croissances comparées

et $\lim\limits_{\substack{A\to 0\\ A>0}} \frac{A^{n+1}}{(n+1)^2} = 0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, l'intégrale converge et $\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$

5) b) Par définition avec la densité, avec $n = 1$

$$E(Z) = -\int_0^1 t\ln(t)\,dt \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt\right)$$

D'après le question précédente, on a donc que avec $n=1$,

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{4}}$$

De plus, par théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 t^2 \ln(t)\,dt \qquad \text{q. 5) a) avec } n=2$$

$$= \frac{1}{9}$$

Donc : $\boxed{\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}}$

Exercice 2.

1) On pose $\forall n \geq 2$, P_n : « u_n et v_n sont bien définis et $u_n > 0$ »
par principe de récurrence
Initialisation : $n=2$.
u_2 et v_2 sont bien définis avec $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ et $v_2 = \frac{2}{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.
Donc P_1 est bien vérifiée
Hérédité : on pose $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie. Montrons P_{n+1}.
On souhaite dans montrer que $\frac{1+u_n}{2} > 0$
On pose $f : x \mapsto \frac{1+x}{2}$ qui est strictement croissante.

Alors : $0 < u_n$

$\Rightarrow 0 < f(u_n)$

$\Rightarrow 0 < \frac{u_n+1}{2}$.

Donc : u_{n+1} est bien définie car on peut appliquer la racine carrée et v_{n+1} également car par stricte croissance de la fonction racine carrée, $u_{n+1} > 0$. Donc P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (en incluant le cas $n=1$ bien défini par définition), u_n et v_n existent et sont bien définis.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont bien définies.}}$

2) def suite_v(n):

```
u = 0
v = 2
for k in range(2, n+1):
    u = np.sqrt((1+u)/2)
    v = v*u
return(v)
```

3) a) On cherche (α_n) tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\alpha_n)$.
avec (α_n) à valeurs dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.
Déjà comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$, on sait que (α_n) doit être à valeurs dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

~~Si on pose $\alpha_n = \frac{\pi}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on observe qu'on a bon~~

On suppose qu'il en existe une, montrons l'unicité.
Supposons (α_n) et (β_n) tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\alpha_n) = \cos(\beta_n)$
où : α_n et β_n sont à valeurs dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.
On : $x \mapsto \cos(x)$ effectue une bijection sur cet intervalle.

Donc, on a par application de cette bijection réciproque
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \beta_n}$ $\boxed{\text{Une telle suite est donc unique.}}$

3) b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \cos(\alpha_n)$ donc $u_{n+1} = \cos(\alpha_{n+1})$.

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+u_n}}{\sqrt{2}} = \cos(\alpha_{n+1})$

$\Leftrightarrow \frac{1+u_n}{2} = \cos^2(\alpha_{n+1})$ } car $u_n = \cos(\alpha_n)$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha_n) = 2\cos^2(\alpha_{n+1}) - 1$

On: $2\cos^2(\alpha_{n+1}) - 1 = \cos(2\alpha_{n+1})$.

Donc: $\cos(\alpha_n) = \cos(2\alpha_{n+1})$.

On: $x \mapsto \cos(x)$ effectue une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}]$ dans $[0;1]$.
Donc: par application de la bijection réciproque,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n$ ↓ on reconnait une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}}\alpha_1$

Donc: on: $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = \alpha_1 = \arccos(u_1)$
Donc $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Donc: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2^n}}$.

3)c) Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}} = \frac{v_n}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

Donc: comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$, on a:
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\prod_{n=1}^{k-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$ ↓ par télescopage
$$\Rightarrow v_k = 2 \prod_{n=1}^{k-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

On: la suite $\left(\frac{1}{2^n} v_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, on peut appliquer le développement.
Alors: $v_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n \times \frac{\pi}{2^n} + o\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi + o(1)$ car $\frac{\pi}{2^n} = o(\pi) = o(1)$.
Donc: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \pi}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

4) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. or : $\frac{\pi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

Donc : $v_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5 \times \frac{1}{120} + o_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5\right) \right)$

$= 2^n \left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{6} \times \frac{1}{2^{3n}} + \frac{\pi^5}{120} \times \frac{1}{2^{5n}} + o\left(\frac{1}{2^{5n}}\right) \right)$

$= \pi - \frac{\pi^3}{6} \times \frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{120} \times \frac{1}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^n}\right)$

Donc, en posant $a = \pi$, $b = \frac{-\pi^3}{6}$ et $c = \frac{\pi^5}{120}$, on a :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

5) a) def suite_w(n) :

Retourn ((4 * suite_v(n+1) - suite_v(n)) / 3)

5) b) $4v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} 4\pi - \frac{4\pi^3}{6\times 4^{n+1}} + \frac{4\pi^5}{120\times 4^{2n+2}} - \pi + \frac{\pi^3}{6\times 4^n} - \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

$\underset{n\to+\infty}{=} 3\pi - \frac{3\pi^5}{120\times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$

Donc : $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{n+1}}\right)$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} w_n = \pi$

5) c) D'après la question précédente,

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{4n+1}}\right)$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$$

ou : on peut multiplier le petit o par un réel comme 4 sans que cela ne change sa nature. finalement,

$$\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{=} \pi - \frac{\pi^5}{480\times 4^{n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}$$

De plus : $w_n - \pi \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

et $v_n - \pi \underset{n\to+\infty}{=} \frac{-\pi^3}{6\times 4^n} + \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$

Donc : $$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} = \frac{\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}{\frac{\pi^3}{6\times 4^n} - \frac{\pi^5}{120\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}$$

$$= \left(\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)\right) \Big/ \left(\frac{20\times 4^n \pi^3 - \pi^5}{120\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\pi^5}{480\times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)\right)\left(\frac{4^{2n}\times 120}{20\times 4^n \pi^3 - \pi^5} + o(4^{2n})\right)$$

$$= \left(\frac{\pi^5}{4} + o(1)\right)\left(\frac{1}{20\times 4^n \pi^3 - \pi^5} + o(4^{2n})\right)$$

$$= \frac{\pi^5}{20\times 4^n \pi^3 - 4\pi^5} + o(4^{2n})$$

5) d) La suite (u_n) se rapproche plus rapidement de la valeur π que la suite (v_n).

> Ainsi, il est plus avantageux d'utiliser (u_n) car elle a une plus grande rapidité de convergence.

6) a) $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^{n+1} + cR^{n+1} + o(R^{n+1})$.

Alors on cherche α et β tel que

$\alpha x_{n+1} + \beta x_n = a + dR^n + o(R^n)$

i.e tel que $\alpha(a + bq^{n+1} + cR^{n+1}) + \beta(a + bq^n + cR^n) + o(R^n)$
$= a + dR^n + o(R^n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha q + \beta = 0 \\ \alpha cR + \beta c = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha q + 1 - \alpha = 0 \\ \alpha cR + (1-\alpha)c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha = \frac{1}{1-q} \\ \frac{1}{1-q} cR + \left(1 - \frac{1}{1-q}\right)c = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{-q}{1-q} \\ \alpha = \frac{1}{1-q} \\ d = \frac{c}{1-q}(R-q). \end{cases}$$

Donc : on définit (y_n) tel que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \frac{1}{1-q} x_{n+1} - \frac{q}{1-q} x_n}$

6) b) $R \in]0;1[$ et $R < q$.

Donc : $\left|\frac{R}{q}\right| < 1$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{R}{q}\right)^n = 0$.

Donc $R^n = o(q^n)$.

Donc : $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} a + bq^n + o(q^n)}$

6)c) comme $R < q$, R converge plus rapidement vers 0 que q.

Donc: y_n convergera plus rapidement vers a que x_n.

Exercice 3.

Partie 1:

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$X_k(\Omega) = [\![0; k]\!]$.

et $\forall n \in [\![0; k]\!]$, $P(X_k = n) = \frac{1}{k+1}$ car les placements sont équiprobables.

Donc: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; k]\!])$

1) b) Comme $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; k]\!])$, alors X_k admet une espérance et une variance.

Alors:

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad \mathbb{E}(X_k) = \frac{k}{2}$ et $\mathbb{V}(X_k) = \frac{k(k+2)}{12}$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$[Y = n] = \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} X_i > 0 \cap X_n = 0\right]$ car $(Y = n)$ signifie que le premier retour à l'origine est au rang n i.e. $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, $X_i \neq 0$ et donc $X_i > 0$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[Y = n] = \left[\bigcap_{i=1}^{n-1} X_i > 0 \cap X_n = 0\right]$

2) b) $P(Y = n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} X_i > 0 \cap (X_n = 0)\right)$ ↓ par indépendance des X_i

$= \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i > 0) \times P(X_n = 0)$

$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1}$ ↓ par télescopage

$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 77 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

or, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

2) c) Soit $R \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{R} P(Y=n) = \sum_{n=1}^{R} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{R+1}.$$

(télescopage)

$\lim\limits_{R \to +\infty} 1 - \frac{1}{R+1} = 0$.

Donc : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1.}$

Donc : $P(Y=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 0$.

Donc : $\boxed{P(Y=0) = 0}$

2) d) Y admet une espérance $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y=k)$ converge (absolument)

car : $|k P(Y=k)| = k P(Y=k)$

$= \frac{k}{k(k+1)}$

$= \frac{1}{k+1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On reconnait dans le terme général d'une série de Riemann divergente. Par comparaison de séries à termes positifs,

Donc: Y n'admet pas d'espérance.

Partie 2.

3) def var_Z(n):
    U = rd.randint(0, n)
    Z = rd.geometric(U)
    Return(Z).

4) a) $(U_n = k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ forme un système complet d'événements. Donc par la formule des probabilités totales,

$\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P((U_n = k) \cap (Z_n = i))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = k)\, P_{(U_n = k)}(Z_n = i)$$ car la loi de Z_n conditionnée à $(U_n = k)$ est géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i}$$

Donc: $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i}}$

4) b) $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $f : x \mapsto x^{i-1}$ et $g : x \mapsto x^i$ sont des fonctions continues sur $[0;1]$. Alors, on reconnait la somme de deux sommes de Riemann.

Des lors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^{i-1}\,dt$

Donc: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} = \left[\frac{t^i}{i}\right]_0^1$

$= \frac{1}{i}$.

De plus, par la même méthode,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i} = \int_0^1 t^n \, dt$$

$$= \frac{1}{n+1}.$$

Donc: par somme de séries convergentes, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

4) c) On remarque alors que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = i) = P(Y = i)$.

Donc: $\boxed{Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y}$ par caractérisation de la convergence en loi pour des probabilités discrètes.

5) On sait que toute loi géométrique admet une espérance.
Donc: $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$, $\mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k)$ existe.

De plus $[\![0; n-1]\!]$ est un ensemble d'entiers fini donc la somme converge.

Par la formule de l'espérance totale,

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = k)\, \mathbb{E}(Z_n \mid U_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}$$ par changement d'indice.

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc: $\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

6) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in [k; k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq [\ln(t)]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

Donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$

6) b) On prend le côté gauche de l'inégalité.

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k)$.

Soit $n \geq 2$.

Alors : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k)$ (par télescopage)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

De l'autre côté, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \ln(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(2n) \leq \ln(n) + 1$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6) c) Comme $n \geq 2$, on peut diviser l'inégalité précédente par $\ln(n) > 0$

Donc, on a : $1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{E(2n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

or : $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$.

Donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(2n)}{\ln(n)} = 1$.

Donc : $\boxed{E(2n) \sim \ln(n).}$

Problème.

Partie 1.

1) a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ, avec $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Donc : $AX = \lambda X \Rightarrow {}^tXAX = \lambda {}^tXX$

non nul car $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

Donc : $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

Donc : $\boxed{\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ \lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1)b) On a supposé que A était positive.

Donc : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

De plus, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$.

Donc, par produit, $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq 0$.

Donc : $\lambda \geq 0$.

2)a) A est une matrice symétrique donc diagonalisable. Il existe même une base d'orthodiagonalisation de A telle que cette base est orthonormée et formée de vecteurs propres de A.

On nomme $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ces valeurs propres et B cette base.

On suppose alors que A est la matrice représentative d'un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Donc la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à B est nécessairement orthogonale.

Ainsi, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale avec les vecteurs propres de A sur la diagonale tel que $A = PD{}^tP$.

2)b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = {}^tPX$.

Alors :

$$\begin{aligned} {}^tYDY &= {}^t({}^tPX)D\,{}^tPX \\ &= {}^tXPD{}^tPX \\ &= {}^tXAX. \end{aligned}$$

Donc : **${}^tYDY = {}^tXAX$ avec $Y = {}^tPX$.**

2) c) D est une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$.

Donc : $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tYDY \geq 0$ (q. 2. b)

i.e. $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Donc : $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geq 0.}$

3) Dans la question 1 on a montré que si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors ses valeurs propres sont positives. De plus, dans la question 2, on a montré que si les valeurs propres de A sont positives alors $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Alors : $\boxed{A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(A) \subset \mathbb{R}_+.}$

Partie 2.

4) a) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et d'après la partie 1, cela signifie que ses valeurs propres sont positives.

Alors, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et comme $(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$ sont les valeurs propres de A, on a bien que $\boxed{\text{la matrice } \Delta \text{ est correctement définie dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

4) b) Par la question 2 de la partie 1, on a que $\boxed{B \in S_n^+(\mathbb{R})}$ car $\Delta \in S_n^+(\mathbb{R})$.

De plus, $B^2 = (P\Delta {}^tP)^2 = P\Delta {}^tP P\Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD {}^tP = A$.

(car P est orthogonale)

$\boxed{\text{Donc } B^2 = A.}$

5) Soit $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$ avec $p \in [\![1;n]\!]$.

$$L_i(\mu_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{\mu_i - \mu_k}{\mu_i - \mu_k} = 1^{p-1} = 1.$$

$$L_i(\mu_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_i - \mu_k} = \frac{\mu_j - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{p} \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_i - \mu_k} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\forall (i;j) \in [\![1;p]\!]^2, \quad L_i(\mu_i) = 1 \text{ et } L_i(\mu_j) = 0}$$

Soit $k \in [\![1;p]\!]$

6) a) $S(\mu_k) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\mu_i}\, L_i(\mu_k)$

$= \sqrt{\mu_k}\, L_k(\mu_k)$

$= \sqrt{\mu_k}$.

Donc : $\boxed{\forall k \in [\![1;p]\!], \quad S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}}$.

Comme $\forall i \in [\![1;n]\!], \exists k \in [\![1;p]\!], \lambda_i = \mu_k$, on a :

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], \quad S(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}}$$

6) b) On pose P_k : " $A^k = PD^kP^{-1}$ " $\forall k \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $k = 0$.

$A^0 = I_n$.

$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n$ car P est orthogonale.

Donc P_0 est vérifiée.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vérifiée. Montrons P_{k+1}.

$A^{k+1} = A(A^k)$

$= A(PD^kP^{-1})$

$= PDP^{-1}PD^kP^{-1}$

$= PD^{k+1}P^{-1}$

Donc P_{k+1} est vérifiée.

Conclusion : par principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kP^{-1}}$$

6) c) S est un polynôme. Or, par la question précédente, on a montré que pour n'importe quel degré k, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Ainsi, à des coefficients réels près, on a prouvé que

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | Nombre de pages : 27 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$S(A) = PS(D)\,{}^tP$. Or les coefficients sont tous réels.

Donc :

$$\boxed{S(A) = PS(D)\,{}^tP}$$ ← q.6)a)

De plus, $S(D) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & S(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} = \Delta$.

Donc : $P\Delta\,{}^tP = S(A)$. ↙ car $B = P\Delta\,{}^tP$.

Donc : $\boxed{S(A) = B}$

Partie 3.

7) a) $C^2 = A$.

Donc $AC = C^2C = CC^2 = CA$.

Donc : $\boxed{AC = CA \text{, i.e. } A \text{ et } C \text{ commutent}}$

7) b) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$A^kC = C^{2k+1} = CC^{2k} = CA^k$.

Donc : $\boxed{A^k \text{ et } C \text{ commutent } \forall k \in \mathbb{N}}$

Comme B est un polynôme de A, alors, comme C commute avec A^k $\forall k \in \mathbb{N}$, $S(A)$ et C commutent.

Or $B = S(A)$.

Donc :

b et c commutent.

8) a) Comme $BC = CB$, alors par traduction dans le monde des endomorphismes,

$b \circ c = c \circ b$

8) b) Soit $x \in E_i$.

$b(c(x)) = c(b(x))$ ↓ par linéarité de c et c et car $x \in E_i$.

car $b \circ c = c \circ b$ $= \sqrt{\mu_i}\, c(x)$

Donc : $c(x) \in \ker(b - \sqrt{\mu_i}\, id) = E_i$. Ceci étant vrai $\forall x \in E_i$,

Donc : **E_i est stable par c.**

Soit $i \in [\![2; p]\!]$,

8) c) c_i est l'endomorphisme induit sur E_i. Or, comme E_i est stable par c, c reste symétrique sur E_i.

Donc :

$$\forall x \in E_i, \forall y \in E_i, \quad \langle c(x); y \rangle = \langle x ; c(y) \rangle$$

Donc : $\forall (x; y) \in E_i, \quad \langle c_i(x) ; y \rangle = \langle x ; c_i(y) \rangle$.

Donc : **$\forall i \in [\![2; p]\!]$, c_i est symétrique.**

8) d) On remarque que E_i est un espace propre de b associé à la valeur propre $\sqrt{\mu_i}$. De plus, comme c_i est symétrique, on en déduit que, comme E_i est stable par c, il existe une base orthonormale de vecteurs propres de b et que ces vecteurs propres sont également des vecteurs propres de c (car

$\forall i \in [\![2;p]\!]$, E_i est stable par c et $boc = cob$).

Donc, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres à la fois de c_i et b.

8) e) Si on fait la concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ $\forall i \in [\![1,p]\!]$, on a que $\mathcal{B}$ (la nouvelle base) est une base de $\mathbb{R}^q$ dans laquelle les matrices de b et c sont diagonales.

On construit alors $\mathcal{B}$ par la concaténation des $\mathcal{B}_i$ $\forall i \in [\![1,p]\!]$

8) f). On a donc que dans une même base $\mathcal{B}$,

$Mat_{\mathcal{B}}(b)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(c)$ sont diagonales.

Or: comme $C^2 = B^2 = A$, on a que

$$Mat_{\mathcal{B}}^2(b) = Mat_{\mathcal{B}}(c)^2 = Mat_{\mathcal{B}}(A).$$

car: le fait que $Mat_{\mathcal{B}}^2(b) = Mat_{\mathcal{B}}^2(c)$ revient à

$$\Rightarrow Mat_{\mathcal{B}}(b) = Mat_{\mathcal{B}}(c)$$

car ces matrices sont diagonales à coefficients positifs.

Donc: Les valeurs propres et les vecteurs propres de b et de c sont identiques (identification sur la diagonale).

finalement on a bien que $C = B$.

Partie 4.

9) d'après la question 1, on a que $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} > 0$

Donc, $\forall \lambda \in Sp(A)$, $\lambda > 0$ si A est définie positive.

De plus, $\forall \lambda \in Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ la diagonale de D de la question 2 sera remplie de coefficients positifs strictement

Donc: D est définie positive.

Donc, d'après la q. 2, A est définie positive.

Donc | A définie positive $\Leftrightarrow$ $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ |

10) a) ${}^tN = {}^t\Pi - {}^tI_n$
$= \Pi - I_n$
$= N$.

Donc | N est symétrique |

10) b) On a que $Sp(N) \subset \mathbb{R}_+$.
or: $\Pi = N + I_n$.

Donc $\forall \lambda \in Sp(N)$, $\lambda + 1 \in Sp(\Pi)$

Donc: | $Sp(\Pi) \subset [1; +\infty[$ |

Donc $0 \notin Sp(\Pi)$.

Donc | Π est inversible |

De plus, $Sp(\Pi^{-1}) \subset]0;1]$ car $Sp(\Pi) \subset [1; +\infty[$ et on sait que Π^{-1} est symétrique également (${}^t\Pi^{-1} = ({}^t\Pi)^{-1} = \Pi^{-1}$)

Donc: $Sp(I_n - \Pi^{-1}) \subset [0;1[\subset \mathbb{R}_+$. et que $I_n = \Pi\Pi^{-1}$
Donc $Sp(I_n - \Pi^{-1}) = Sp(\underbrace{\Pi^{-1}}_{\geq 0}(\underbrace{\Pi - I_n}_{\geq 0}))$
≥ 0.

Donc | $I_n - \Pi^{-1}$ est positive |

11) a) On sait que $S_2 - S_1$ est positive et que S_1 est définie positive. Donc $Sp(S_1) \subset \mathbb{R}_+^*$.
Supposons que $0 \in Sp(S_2)$. Alors, $\exists \lambda > 0$, $\lambda \in Sp(S_1)$ tel que

IMPRIMERIE NATIONALE – 2024-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 27 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$(0-\lambda) \in Sp(S_2 - S_1)$. Or ceci est absurde car $S_2 - S_1$ est pairne.
Donc $0 \notin Sp(S_2)$.

Donc : S_2 est définie pairnive.

11) b) $Sp(S_1^{1/2}) = \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in Sp(S_1)\}$.

or : $0 \notin Sp(S_1)$ et par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$, seul $\sqrt{0} = 0$.

Donc : $0 \notin Sp(S_1^{1/2})$.

Donc : $S_1^{1/2}$ est inversible.

$S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - I_n$ car $S_1 = (S_1^{1/2})^2$

Donc : $S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2} S_2 S_1^{-1/2} - I_n$

11) c) ${}^tL = {}^t(S^{-1/2} S_2 S^{-1/2})$
$= S^{-1/2} S_2 S^{-1/2}$
$= L$.
Donc L est symétrique.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus, d'après la question 10, on a que pour $L \in S_n(\mathbb{R})$,

$\boxed{L - I_n \in S_n(\mathbb{R})}$ q. 10. a)

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$${}^tX (L - I_n) X = {}^tX (S^{-1/2} S_2 S^{-1/2}) X - {}^tXX$$

11) d) S_2 est inversible. On note S_2^{-1} son inverse (car S_2 définie positive)

Alors,

$$S^{1/2} S_2^{-1} S^{1/2} \times L = S^{1/2} S_2^{-1} S^{1/2} S^{-1/2} S_2 S^{-1/2}$$
$$= I_n.$$

Donc $\boxed{L \text{ est inversible}}$

Donc, d'après la question 10. b) comme L est inversible,

$\boxed{I_n - L^{-1} \text{ est positive}}$.

car $\quad I_n = L^{-1} L$ donc $I_n - L^{-1} = L^{-1} (L - I_n)$

or: $Sp(L^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$ et $Sp(L - I_n) \subset \mathbb{R}_+$.

Donc: par produit, $Sp(I_n - L^{-1}) \in \mathbb{R}_+$.

11) e) On remarque que $S^{1/2}(S^{-1} - S_2^{-1})S^{1/2} = I_n - L^{-1}$ q. 11. d)

Donc $S^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}$ est positive.

or; comme $S_1^{1/2}$ est inversible et positive, on a que

$$Sp(S_1^{-1} - S_2^{-1}) \subset \mathbb{R}_+$$

car: $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX S^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1}) S_1^{1/2} X \geq 0$

...

Donc: $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX (S_1^{-1} - S_2^{-1}) X \geq 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{S_1^{-1} - S_2^{-1} \text{ est positive}}$

FIN.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2023-12-PF 018 751