

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

D9-00088
467717
Mat Appro



Code épreuve : 282

Nombre de pages : 19

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I.

1) Soit P la matrice canoniquement associée à Φ_σ . On appelle e cette base.

Alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Id}_C(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i\text{-ème position}$.

Ainsi : la traduction de $\Phi_\sigma(e_i)$ est $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

on : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(P)_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$

Donc : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma(i)\text{-ème position}$

Donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Id}_C(e_{\sigma(i)})$

Donc, par traduction dans le monde des endomorphismes,
 $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\Phi(e_j) = e_{\sigma(j)}$

2) Par multiplication de matrices associées à des endomorphismes, on a que

$$P_P P_T = (P_{ij})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$$

et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P_{ij} = \delta_{i, \sigma(T(j))}$

$$= \delta_{i, (\sigma \circ T)(j)}$$

Donc : $P_P P_T = P_{\sigma \circ T}$

On remarque que l'application identité est une bijection de $\{1, n\}$ dans $\{1, n\}$.

Alors, si on prend $T = \sigma^{-1}$, le résultat précédent se traduit par

$$P_\sigma P_\sigma^{-1} = I_n \rightarrow \text{matrice représentative de l'application identité.}$$

Donc la matrice inverse d'une permutation est aussi une matrice de permutation.

3) D'après la question précédente, pour P une matrice de permutation tel que $P = P_\sigma$ avec σ une bijection de $\{1, n\}$ sur $\{1, n\}$,

$$P_\sigma P_\sigma^{-1} = I_n.$$

Donc: $P^{-1} = P_\sigma^{-1}$

or: $\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, (P_\sigma^{-1})(i, j) = \delta_{i, \sigma^{-1}(j)}$

$$= \delta_{\sigma(i), j}$$

$$= (P_\sigma)_{j, i}$$

Donc: $P_\sigma^{-1} = {}^t P.$

Donc: $P^{-1} = {}^t P$

Donc P est une matrice de permutation $\Rightarrow P$ est orthogonale

4) on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n: " \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \exists \alpha \in P_n \text{ tel que } x_1(\alpha) \geq \dots \geq x_n(\alpha) "$

Initialisation : pour $n = 2$

Sait $(n_1; n_2) \in \mathbb{R}^2$.

* si $n_1 \geq n_2$, alors on pose $\alpha = \text{id}$

* si $n_2 > n_1$, alors on pose α tel que $\alpha(1)=2$ et $\alpha(2)=1$.

Donc: $\forall (n_1; n_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists \alpha \in P_n$, $\alpha(1) \geq \dots \geq \alpha(n)$

Donc P_2 est vérifiée.

Hérédité: On suppose $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie. Montrons P_{n+1} .

Sait $(n_1; \dots; n_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

On a par hypothèse de récurrence qu'il existe $\alpha \in P_n$ tel que

$$n_{\alpha(1)} \geq \dots \geq n_{\alpha(n)}$$

Alors, on a n_{n+1} à ranger

Sait β la bijection de $\{1; n+1\}$, dans $\{1; n+1\}$.

5) Sait $i \in \{1; n\}$. On remarque que les $n_{\alpha(i)}$ et $n_{\beta(i)}$ sont dans le même ordre croissant.

* si les $(n_i)_{i \in \{1; n\}}$ sont deux à deux distincts, alors on a par unicité du classement décroissant que

$\forall i \in \{1; n\}$, $n_{\alpha(i)} = n_{\beta(i)}$ car les bijections sont égales

* si les $(n_i)_{i \in \{1; n\}}$ sont pas deux à deux distincts, alors on a quand même le même classement et la même valeur même si les bijections ne sont pas identiques.

$\text{Ainsi } \forall i \in \{1; n\}, n_{\alpha(i)} = n_{\beta(i)}$

6)

def permutevecteur (X):

n = len(X)

alpha = np.arange(0, n, 1)

Y = X.copy()

for i in range(n):

imax = 0

for k in range(i, n):

if Y[k] > Y[imax]:

imax = k

if imax > i:

Y[i], Y[imax] = Y[imax], Y[i]

alpha[i], alpha[imax] = alpha[imax], alpha[i]

return (Y, alpha)

Partie II.

7) a) Soit S une matrice orthostochastique et $Q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (i, j) \in \{2, n\}^2, S_{ij} = (Q_{ij})^2$.

Alors:

- $\forall (i, j) \in \{2, n\}, S_{ij} \geq 0$ par positivité du carré.
- Soit $i \in \{2, n\}$.

$$\sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n (Q_{ij})^2$$
or: Q est une matrice orthogonale donc ${}^tQQ = I_n$.

Donc: $\sum_{j=1}^n S_{ij} = \sum_{j=1}^n (Q_{ij})^2 = 1 + 0 = 1$.

• De la même manière, car $Q {}^tQ = I_n$,
 $\forall j \in \{2, n\}, \sum_{i=1}^n S_{ij} = \sum_{i=1}^n (Q_{ij})^2 = 1 + 0 = 1$.

Donc: toute matrice orthostochastique est bistochastique.

Soit P une matrice de permutation.

Alors P n'a que des 1 ou des 0 comme coefficients

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 19

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et a , comme c'est une bijection de $\{1, n\}$ dans $\{1, n\}$ qui lui est associé, seulement un 1 par ligne et par colonne.

Ainsi :

- $\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, P_{ij} \geq 0$
- $\forall i \in \{1, n\}, \sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$
- $\forall j \in \{1, n\}, \sum_{i=1}^n P_{ij} = 1$

Donc toute matrice de permutation est bistochastique

7) b) Soit $n=3$.

La matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice bistochastique.

Cependant si on prend la matrice $Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui serait la matrice orthogonale associée à A

si elle était orthostochastique, on remarque que Q n'est même pas inversible donc ne peut pas être orthogonale.

Donc toute matrice bistochastique n'est pas orthostochastique

8) a) $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension 2 donc il n'y a que 2 permutations σ possibles

* si $\sigma = \text{id}$: $P = I_2$

* si σ est défini par $\sigma(1)=2$ et $\sigma(2)=1$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont les matrices de permutation de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

8) b)

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $\alpha \in [0;1]$ et P une matrice de permutation de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$.

Montrons que S est bistochastique.

• Par somme, on sait que $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$, $S_{ij} \geq 0$.

• $\forall i \in \{1,2\}$, $\sum_{j=1}^2 S_{ij} = \alpha \sum_{j=1}^2 I_{ij} + (1-\alpha) \sum_{j=1}^2 P_{ij} = \alpha + 1-\alpha = 1$.

• $\forall j \in \{1,2\}$, $\sum_{i=1}^2 S_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^2 I_{ij} + (1-\alpha) \sum_{i=1}^2 P_{ij} = \alpha + 1-\alpha = 1$ car ce sont des matrices q.f.a) bistochastiques.

Donc: S est une matrice bistochastique.

$\Rightarrow$ Supposons que S est une matrice bistochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Si $S = I_2$, alors on prend $P = I_2$ et le résultat est direct.

• Sinon, on sait que $S_{1,2} = 1 - S_{1,1}$ et $S_{2,1} = 1 - S_{2,2}$ avec $\forall (i,j) \in \{1,2\}^2$, $S_{ij} \geq 0$ et $S_{ij} \leq 1$.

$$\text{Donc } S = \begin{pmatrix} S_{11} & 1-S_{11} \\ 1-S_{22} & S_{22} \end{pmatrix}$$

or, on sait aussi que $S_{11} = 1 - S_{21} = 1 - (1 - S_{22}) = S_{22}$

Donc: on note $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha = S_{11}$, et on a:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc: } S = \alpha I_2 + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de permutation de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (q.f.a)

et P une matrice de permutation

$$\text{Donc } \exists \alpha \in [0;1], S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$$

Ainsi, S bistochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice de permutation tel que $S = \alpha I_2 + (1-\alpha)P$

g) a) E est un ensemble de 3 éléments. Le nombre de permutations est donc $3! = 6$

g) b) • Pour P_1 : P_1 est la matrice associée à σ tel que $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$.

Donc P_1 est une matrice de permutation pour σ tel que $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2$.

• Pour P_2 : P_2 est une matrice de permutation, associée à σ tel que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$

• Pour P_3 : P_3 est une matrice de permutation, associée à σ tel que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3$

• Pour P_4 : P_4 est une matrice de permutation, associée à σ tel que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$

• Pour P_5 : P_5 est une matrice de permutation associée à σ tel que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$.

g) c) On sait que S est stochastique.

Donc: $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \sum_{j=1}^3 s_{ij} = 1$.

$$\text{Donc } \begin{cases} s_{11} + s_{12} + s_{13} = 1 \\ s_{21} + s_{22} + s_{23} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{13} = 1 - s_{11} - s_{12} \\ s_{23} = 1 - s_{21} - s_{22} \end{cases}$$

De plus, on sait que $\forall j \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^3 s_{ij} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_{11} + s_{21} + s_{31} = 1 \\ s_{12} + s_{22} + s_{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_{31} = 1 - s_{11} - s_{21} \\ s_{32} = 1 - s_{22} - s_{12} \end{cases}$$

Donc:

$$S \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 1 - s_{11} - s_{12} \\ s_{21} & s_{22} & 1 - s_{21} - s_{22} \\ 1 - s_{11} - s_{21} & 1 - s_{12} - s_{22} & s_{33} \end{pmatrix}$$

De plus, on sait que $s_{33} = 1 - s_{32} - s_{31} = 1 - s_{2,3} - s_{1,3}$

Donc: $S_{33} = 1 - (1 - S_{21} - S_{22} + 1 - S_{11} - S_{12})$
 $= S_{11} + S_{22} + S_{21} + S_{12} - 1.$

on: $S_{33} \in [0; 1]$ i.e. $(S_{11} + S_{22} + S_{21} + S_{12} - 1) \in [0; 1]$

Donc: une condition nécessaire est que $(S_{11} + S_{22} + S_{21} + S_{12}) \in [1; 2]$

9) d) Soit $\beta_0 = \min_{1 \leq i \leq 3} s_{ii}$

On suppose qu'il existe $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 5}$ tel que $\beta_i \geq 0$
 et tel que $S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^5 \beta_i P_i.$

Ainsi: $S = \begin{pmatrix} \beta_0 + \beta_1 & \beta_3 + \beta_4 & \beta_2 + \beta_5 \\ \beta_3 + \beta_5 & \beta_0 + \beta_2 & \beta_1 + \beta_4 \\ \beta_2 + \beta_4 & \beta_1 + \beta_5 & \beta_0 + \beta_3 \end{pmatrix}$

Alors: $\sum_{i=1}^5 \beta_i = 1 - \beta_0$

e D'après la question 9) c), on retrouve bien que les coefficients β_i sont nécessairement positifs.

De plus on remarque que $(I_3; P_1; P_2; P_3; P_4; P_5)$

d'après la question 9) c)

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 1 - s_{11} - s_{12} \\ s_{21} & s_{22} & 1 - s_{21} - s_{22} \\ 1 - s_{11} - s_{21} & 1 - s_{12} - s_{22} & s_{33} \end{pmatrix}$$

On suppose que $\beta_0 = s_{11}$ (et le résultat sera le même pour $\beta_0 = s_{22}$ ou $\beta_0 = s_{33}$ à un décalage près).

Alors: $S = \beta_0 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & 1 - s_{11} - s_{12} \\ s_{21} & s_{22} - \beta_0 & 1 - s_{22} - s_{21} \\ 1 - s_{11} - s_{21} & 1 - s_{12} - s_{22} & s_{33} - \beta_0 \end{pmatrix}$

$= \beta_0 I_3 + 0 \times P_1 + s_{2,3} P_4 + s_{3,2} P_5 + \begin{pmatrix} 0 & s_{12} - s_{23} & s_{13} s_{32} \\ s_{21} s_{32} - s_{22} \beta_0 & 0 & 0 \\ s_{31} - s_{13} & 0 & s_{33} \beta_0 \end{pmatrix}$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 19

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc, on a bien $(\beta_i)_{i \in [1;5]}$ des réels positifs tel que $S = \beta_0 I_3 + \sum_{i=1}^5 \beta_i P_i$ avec la condition nécessaire précédente.

9) e) Ainsi, on a montré que pour $n=3$, il existe 6 permutations P_i et $(\beta_i)_{i \in [0;5]}$ tel que pour S bistochastique $S = \sum_{i=0}^5 \beta_i P_i$.

Donc, nous avons prouvé le théorème de Birkhoff - Von Neumann pour $n=3$.

10)

def bistochastique (n, iter):

 A = np.zeros((n,n))

 for i in range(n):

 for j in range(n):

 A[i,j] = rd.Random()

 I = np.zeros((n,n))

 for h in range(iter+1):

 for i in range(n):

 for j in range(n):

 I[i,j] = A[i,j] / np.sum(A[i])

 A[i,j] = I[i,j] / np.sum(I[j])

return (A).

Parce III.

11) Soit $\sigma \in P_n$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$

$$P_\sigma X = \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \text{Mat}_C(x_\sigma) \text{ avec } C \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^n,$$

Donc: pour $\sigma \in P_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $P_\sigma X = \text{Mat}_C(x_\sigma)$

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

12) f est symétrique si $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \sigma \in P_n$, $f(x) = f(x_\sigma)$

Par abus de notation, on peut penser dans le monde des matrices et on a donc: f symétrique si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall \sigma \in P_n$
 $f(X) = f(P_\sigma X)$ (q. 11)

Donc: comme ceci est vrai nécessairement pour tout σ permutation de P_n et donc toute matrice P_σ , cela est vrai $\forall P \in P_n$ en gardant l'équivalence de la définition.

Donc f symétrique $\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall P \in P_n$, $f(PX) = f(X)$

13) $\Rightarrow$ Supposons que f est symétrique. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
 Alors, comme $\hat{x} = x_\alpha$ avec α de la question 5, on a que $f(\hat{x}) = f(x_\alpha) = f(x)$. De plus $\hat{x} \in H_n$.

Donc, si on prend $\hat{f}: H_n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application induite
 $\hat{x} \mapsto f(x)$

On a bien qu'il existe $\hat{f}: H_n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que
 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$

K $\Rightarrow$ Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \hat{f}(\hat{x})$ avec $\hat{f}: H_n \rightarrow \mathbb{R}$.
 Alors $f(x) = \hat{f}(x_\alpha)$ avec α la permutation de la q. 5.
 Soit σ une injection de P_n .

Alors, $f(x_\sigma) = \hat{f}(x_\alpha)$ car α est la même injection pour chaque x_σ .

Donc, $\forall \sigma \in P_n$, $f(x_\sigma) = f(x)$.

Donc f est symétrique.

Finalement, f est symétrique $\Leftrightarrow \exists \hat{f}: H_n \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \hat{f}(\hat{x})$

14) o f_1 : Soit σ une permutation quelconque de P_n .

Soit $x = (x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconque également.

$$\begin{aligned} f_1(x_\sigma) &= \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \\ &= f_1(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{car l'ordre dans lequel on somme} \\ \text{ne change rien à la somme et que} \\ \text{l'on somme toujours les} \\ \text{mêmes éléments} \end{array} \right\}$$

Donc f_1 est symétrique.

o f_2 : Soit σ la permutation de P_n qui échange seulement le premier élément.

Soit $x = (2; 0; 0; \dots; 0)$.

Alors: $f_2(x_\sigma) = 2$ et $f_2(x) = 2^2 = 4$.

Donc, $\exists x \in \mathbb{R}^n$ et $\exists \sigma \in P_n$, $f_2(x) \neq f_2(x_\sigma)$.

Donc f_2 n'est pas symétrique.

o f_3 : Soit σ une permutation de P_n et $x = (x_1; \dots; x_n)$.

Alors, $f_3(x) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}|$

or, cette valeur maximale ne change pas en faisant de

la valeur de l'indice mais plutôt en fonction de la valeur des $(n_i) : i \in [1, n]$ qui reste inchangé. Donc $f(x_\sigma) = f(x)$

Ainsi, f_σ est symétrique.

15) a) Soit $i \in [1, n]$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $x + te_i \in \mathbb{R}^n$ et ce $\forall t \in \mathbb{R}$.

Donc, par composée,

g_i est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, on reconnaît la formule de la dérivée directionnelle et

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{i,x}'(t) = \langle \nabla f(x + te_i), e_i \rangle = \partial_i f(x + te_i)$$

15) b) Soit $i \in [2, n]$, soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$.

$$g_{i,x_\sigma}(t) = f(x_\sigma + te_i)$$

$$\text{et } g_{\sigma(i),x}(t) = f(x + t e_{\sigma(i)})$$

or σ est une permutation donc est linéaire.

$$\begin{aligned} \text{Donc: } g_{\sigma(i),x}(t) &= f(x + t e_{\sigma(i)}) \quad \text{par symétrie} \\ &= f(x_\sigma + \underbrace{t e_{\sigma^2(i)}}_{q.1}) \end{aligned}$$

Donc: on a trouvé que $\forall i \in [2, n], \forall t \in \mathbb{R},$

$$g_{\sigma(i),x}(t) = g_{\sigma^2(i),x_\sigma}(t).$$

$$\begin{aligned} \text{on trouve de l'autre côté que } \forall t \in \mathbb{R}, \\ g_{i,x_\sigma}(t) &= f(\sigma^{-1}(x_\sigma + te_i)) \quad ? \\ &= f(x + t \sigma^{-1}(\sigma^{-1}(e_i))) \end{aligned}$$

15) c) D'après la question précédente, $\forall i \in [2, n], \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$$g_{i,x_\sigma} = g_{\sigma(i),x}$$

Donc: $g_{i,x_\sigma}' = g_{\sigma(i),x}'$

en particulier, $g_{i,x_\sigma}'(0) = g_{\sigma(i),x}'(0)$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 19

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'après la question 15) a) on a alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
soit $f(x) = f(x_0)$

Pour, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, soit $f(x) = f(x_0)$

16. Soit f une fonction S convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors $\forall X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$
et pour toute matrice B bistochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
 $f(BX) \leq f(X)$

En particulier, pour les matrices de permutation (qui
sont des matrices bistochastiques), $\forall P \in \mathbb{P}_n$
 $f(PX) \leq f(X)$

Or : toutes les matrices bistochastiques peuvent s'écrire
sous la forme $S = \sum_{k=1}^r \alpha_k P_k$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ et (α_k) des
réels positifs et (P_k) des projecteurs, d'après le
théorème de Birkhoff - von Neumann.

17) On prouve ce résultat dit inégalité de Jensen par
récurrence.

On pose, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $P_n : \forall (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{E}^m$, $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,
 $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$, $g\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k z_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k g(z_k)$

Initialisation: pour $m=2$. Soit $(\alpha_1; \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

Par définition de la convexité

$$\forall (z_1; z_2) \in \mathbb{E}^2, g(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \leq \alpha_1 g(z_1) + \alpha_2 g(z_2)$$

avec $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Donc P_1 est vérifiée.

Hérédité: Supposons que P_m est vraie pour m fixé.

Soit $(\alpha_1; \dots; \alpha_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$

* si $\alpha_{m+1} = 1$, alors l'inégalité est immédiate par définition de la convexité

* si $\alpha_{m+1} \neq 1$.

On pose alors $\forall i \in \{1, \dots, m\}, p_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{m+1}}$.

$$\text{Alors } \sum_{i=1}^m p_i = \frac{1 - \alpha_{m+1}}{1 - \alpha_{m+1}} = 1.$$

Donc: par hypothèse de récurrence, $\forall (z_1; \dots; z_m) \in \mathbb{E}^m$,

$$g\left(\sum_{i=1}^m p_i z_i\right) \leq \sum_{i=1}^m p_i g(z_i)$$

$$\Rightarrow g\left(\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{m+1}} z_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{m+1}} g(z_i) \quad (*)$$

Soit $z_{m+1} \in \mathbb{E}$.

On note alors $z = \sum_{i=1}^m p_i z_i \in \mathbb{E}$.

$$\text{Alors, } g((1 - \alpha_{m+1})z + \alpha_{m+1} z_{m+1}) \leq (1 - \alpha_{m+1})g(z) + \alpha_{m+1}g(z_{m+1})$$

$$\begin{aligned} \text{par } (*) \hookrightarrow & \leq (1 - \alpha_{m+1}) \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{m+1}} g(z_i) + \alpha_{m+1} g(z_{m+1}) \\ & \leq \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i g(z_i). \end{aligned}$$

Donc P_{m+1} est vérifiée.

Conclusion: ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{E}^m$,
 $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$,

$$g\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k z_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k g(z_k)$$

18) Soit f symétrique et convexe.

Soit B une matrice stochastique. D'après le théorème de Birkhoff-Von Neumann, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\exists (P_1, \dots, P_m) \in \mathbb{P}_n^m$ tel que
 $B = \sum_{k=1}^m \alpha_k P_k$ avec $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$

Soit $x \in \mathcal{D}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(Bx) &= f\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k P_k x\right) \quad \downarrow \text{par convexité de } f \\ &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k f(P_k x) \quad \downarrow \text{car } f \text{ est symétrique} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k f(x) \quad \text{d'où } f(P_k x) = f(x) \\ &\leq f(x) \sum_{k=1}^m \alpha_k \quad \downarrow \text{par hypothèse} \\ &\leq f(x). \end{aligned}$$

Donc: si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et convexe, alors, f est J -convexe.

19) a) Soit $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ((1-t)x_1 + tx_2; (1-t)x_2 + tx_1) &= (x_1 + t(x_2 - x_1); x_2 + t(x_1 - x_2)) \\ &= x + t(x_2 - x_1; x_1 - x_2) \end{aligned}$$

On note $u = (x_2 - x_1; x_1 - x_2)$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + tu)$. f étant $\mathcal{C}^1$, on a pour les mêmes raisons qu'en question 15) a) que g est $\mathcal{C}^1$. De plus, on reconnaît à nouveau la formule de la dérivée directionnelle.

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \langle Df(x + tu); u \rangle$$

En traduisant avec les coefficients, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = (n_2 - n_1) \partial_1 f(x + tv) + (n_1 - n_2) \partial_2 f(x + tv)$$

Donc :

$$g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$
$$\text{et } \forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = (n_2 - n_1) \partial_1 f(x + tv) + (n_1 - n_2) \partial_2 f(x + tv)$$

17) b) On note v le vecteur $(n_2; n_1)$.

On remarque que $\forall t \in [0, 1]$

$$g(t) = f((1-t)x + tv) \quad \text{par convexité de } f$$

$$\leq (1-t)f(x) + tf(v)$$

or si on prend σ la bijection qui est tel que $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$,
on remarque que $v = x_\sigma$

Alors, car f est S -convexe et que P_σ est bistochastique,

$$tf(v) = tf(PX) \leq tf(x) \leq f(x) \quad (\text{car } f \text{ est symétrique car } S\text{-convexe})$$

$$\text{Donc: } \forall t \in [0, 1] \quad g(t) \leq (1-t)f(x) + tf(x) \quad \text{par q. 16)}$$

$$\leq f(x)$$

$$\text{On: } g(0) = f(n_1; n_2) = f(x).$$

$$\text{Donc, } \forall t \in [0, 1], g(t) \leq g(0)$$

On admettra que $g'(0) \leq 0$.

17) c) $\forall x = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$,

comme $g'(0) \leq 0$, alors,

$$(n_2 - n_1) \partial_1 f(x) + (n_1 - n_2) \partial_2 f(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow (n_2 - n_1) (\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \leq 0$$

$$\Rightarrow (n_1 - n_2) (\partial_1 f(x) - \partial_2 f(x)) \geq 0.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 19

Session : 2026

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc, $\forall u = (u_1; u_2) \in \mathbb{R}^2, (u_1 - u_2)(g_1(u) - g_2(u)) \geq 0$

20.

Soit S une matrice bistochastique.

21) $\Rightarrow$ Supposons que h est convexe. $\forall$ Alors, d'après le théorème de Birkhoff - von Neumann, $\exists (d_i; \dots; a_{nm}) \in \mathbb{R}^m$ tel que $\sum_{i=1}^m d_i = 1$ $\exists m \in \mathbb{N}^m$

et il existe $(P_i)_{i \in \{1, \dots, m\}} \in \mathbb{P}_n^m$ des matrices de permutation tel que $S = \sum_{i=1}^m d_i P_i$. Soit $X \in \mathcal{G}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } f(SX) &= f\left(\sum_{i=1}^m d_i P_i X\right) \\ &= \sum_{h=1}^n h\left(\sum_{i=1}^m d_i P_i X\right) \\ &\leq \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^m d_i h(P_i X) \\ &\leq \sum_{i=1}^m d_i f(P_i X) \\ &\leq f(X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Supposons f étant S -convexe. Alors, $\forall S$ bistochastique, $f(SX) \leq f(X) \Rightarrow f\left(\sum d_i P_i X\right) \leq f(X)$

Page IV.

22) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $Q \in O_n$

Alors: $\text{tr}(Q A^k Q^t) = \text{tr}(\overbrace{Q^t Q}^{I_n} A^k) = \text{tr}(A^k)$

Con: à condition de produit licite entre A et B, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Donc $A \mapsto \text{tr}(A^k)$ est invariante.

24) $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Donc A est diagonalisable. De plus, A est symétrique et représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans une base orthonormée (canonique).

Donc: $\Lambda(A) = D(\lambda(A))$ est la matrice avec les valeurs propres de A.

De plus, la matrice de passage entre la base canonique et la base formée de vecteurs propres de A (ou de l'endomorphisme associé à A) est forcément une matrice orthogonale car A est bien symétrique.

Donc $\exists Q \in O_n(\mathbb{R}), A = Q \Lambda(A)^t Q$

25) a) Soit $A \in M_n$.

$f(A) = f(Q \Lambda(A)^t Q) = f(\Lambda(A))$ car f est invariante.

Donc $\forall A \in M_n(\mathbb{R}) \quad f(A) = f(\Lambda(A))$

25) b) Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ Soit σ une permutation.

On remarque que: $D \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est semblable à $D \begin{pmatrix} u_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ u_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ avec une matrice de passage étant une matrice de permutation donc orthogonale (q. 3)

Ainsi, $\exists P_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = F\left(P_0 D \begin{pmatrix} n_0(1) \\ \vdots \\ n_0(n) \end{pmatrix} P_0^{-1}\right)$

$$= F\left(D \begin{pmatrix} n_0(1) \\ \vdots \\ n_0(n) \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{car} \\ \text{F est} \\ \text{spectral} \end{array}$$

$$= f(n_0).$$

et $P_0 \in \mathcal{O}_n$.

Donc: f est symétrique

25) c) Supposons F convexe.

Alors soit $\alpha \in (0,1)$ et $(n; y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ avec

$n = (n_1; \dots; n_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1; \dots; y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\alpha n + (1-\alpha)y) = F\left(D \begin{pmatrix} (1-\alpha)y_1 + \alpha n_1 \\ \vdots \\ \alpha n_n + (1-\alpha)y_n \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{par linéarité} \\ \text{de la somme} \\ \text{matricielle} \end{array}$$

par convexité de f

$$= F\left((1-\alpha)D \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \alpha D \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq (1-\alpha)F\left(D \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + \alpha F\left(D \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq (1-\alpha)f(y) + \alpha f(n).$$

Donc f convexe $\Rightarrow f$ convexe.

FIN

