

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

D9-00088
467717
Mat2 Appro

Code épreuve : 283

Nombre de pages : 22

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Preliminaires

1) Soit $g \in \mathcal{F}(a;b)$.

La fonction g est strictement croissante sur $]a;b[$ et est continue sur $]a;b[$ car $\mathcal{F}$ sur cet intervalle.

Donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]a;b[$ dans $]\lim_{n \rightarrow a} g(n); \lim_{n \rightarrow b} g(n)[$.

car: comme $g \in \mathcal{F}(a;b)$, $\lim_{n \rightarrow a} g(n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow b} g(n) = 1$.

Donc, la restriction de g à $]a;b[$ réalise une bijection de $]a;b[$ dans $]0;1[$.

2) On remarque $F_x' = f$ qui est continue et strictement positive sur $]a;b[$. Donc: F_x est $\mathcal{C}^1$ et croissante strictement sur $]a;b[$.

De plus: comme f est nulle sur $]-\infty; a]$ et sur $[b; +\infty[$, on a que:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} F_x^{(n)} = \lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} \int_a^n f(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow a \\ n > a}} \int_0^n f(t) dt \cdot \int_0^a f(t) dt = 0$$

$$\text{et } \lim_{\substack{n \rightarrow b \\ n < b}} F_x^{(n)} = \lim_{\substack{n \rightarrow b \\ n < b}} \int_a^n f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = 1$$

car f est une densité de probabilité nulle sur $]-\infty; a]$ et $[b; +\infty[$.

Ainsi, par définition F_X est également croissante et à valeurs dans $[0,1]$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$ ce n'est une fonction de répartition.

Donc:

- * F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,1]$
- * F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$.
- * F_X est strictement croissante sur $]a,b[$
- * $\lim_{x \rightarrow a} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow b} F_X(x) = 1$

Donc $F_X \in \mathcal{F}(a,b)$

I.

3) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P((X \leq x) \cap (Y \leq y))$$

on: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] \subset [X \leq x]$.

Donc, par croissance des probabilités, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leq P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) \leq P(X \leq x)$$

or: $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = 0$ par définition de la fonction de répartition.

Par encadrement, on a donc: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = 0$

De la même manière, on a que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] \subset [Y \leq y]$$

Et par le même encadrement, on a:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_{(X,Y)}(u; t) = 0$$

4) a) Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$F_X(u) = P(X \leq u)$$

on: on remarque que avec $\omega \in \{X \leq u\}$

$$\Leftrightarrow X(\omega) \leq u$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in (X \leq u) \cap (Y \leq n)$$

$$\Leftrightarrow \omega \in \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq u) \cap (Y \leq n) \right)$$

Par égalité des événements, $F_X(u) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq u) \cap (Y \leq n)\right)$

4) b) Par la formule de la question 4) a) on a que
 $\forall u \in \mathbb{R}$,

$$F_X(u) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq u) \cap (Y \leq n)\right)$$

Par le théorème de la limite monotone, on a:

$$F_X(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{r=0}^n (X \leq u) \cap (Y \leq r)\right)$$

on, toujours par le théorème de la limite monotone dans le sens croissant (au sens de l'inclusion), on a:

↳ car c'est une suite croissante

$$F_X(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P((X \leq u) \cap (Y \leq n))$$

Donc: $\forall u \in \mathbb{R}, F_X(u) = \lim_{r \rightarrow +\infty} P((X \leq u) \cap (Y \leq r))$

5) On remarque que par symétrie, $F_{(X,Y)} = F_{(Y,X)}$.
 Donc, de la même façon qu'à la question précédente, on trouve que $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq n) \cap (Y \leq y)\right)$$

et par le théorème de la limite monotone

$$\forall y \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t; y) = F_X(y)$$

6) Alors, par la question 4 et 5, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, k) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 \text{ car } F_X \text{ est une fonction de répartition et donc}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, k) \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F_Y(k) = 1 \text{ pour la même raison.}$$

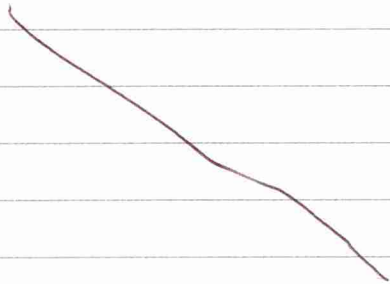
Enfinement, $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, k) \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} F_{(X,Y)}(t, k) \right) = 1}$

7) Soit $(a_1; a_2; b_1; b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$.

Alors : $F_{(X,Y)}(b_1; b_2) + F_{(X,Y)}(a_1; a_2) - F_{(X,Y)}(b_1; a_2) - F_{(X,Y)}(a_1; b_2)$

$$= P((X \leq b_1) \cap (Y \leq b_2)) + P((X \leq a_1) \cap (Y \leq a_2))$$

$$\begin{aligned} F(b_1; b_2) &\geq F(b_1; a_2) \\ &\geq F(a_1; b_2) \end{aligned}$$



8) a) on reprend les mêmes inclusions qu'à la question 3.

Alors : $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a que

$$[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] \subset [X \leq x] \text{ et } [(X \leq x) \cap (Y \leq y)] \subset [Y \leq y].$$

Ponc : par croissance des probabilités, $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$,
 $F_{(X,Y)}(x; y) \leq F_X(x)$ et $F_{(X,Y)}(x; y) \leq F_Y(y)$.

Ponc : $\boxed{\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, F_{(X,Y)}(x; y) \leq \min(F_X(x); F_Y(y))}$

8) b) $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$, $F_{(X,Y)}(x; y) \geq 0$.

Supposons donc que $F_X(x) + F_Y(y) - 1 \geq 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies		
	Consignes <ul style="list-style-type: none"> Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 		

on, par la formule du crible, on a, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(\underbrace{(X \leq x) \cup (Y \leq y)}_{1 \geq}) = F_X(x) + F_Y(y) - F_{(X, Y)}(x, y)$$

Donc: $1 \geq F_X(x) + F_Y(y) - F_{(X, Y)}(x, y)$

$$\Rightarrow F_{(X, Y)}(x, y) \geq F_X(x) + F_Y(y) - 1$$

Donc: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F_{(X, Y)}(x, y) \geq \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1; 0)$

9) on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_{(X, Y)}(x; b_2) = \min(F_1(x); \underbrace{F_2(b_2)}_{\rightarrow 1})$$

$$= F_1(x)$$

on: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F_{(X, Y)}(x; k)$ g. 4 et 5

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \min(F_1(x); \underbrace{F_2(k)}_{\substack{\text{si } b_2 \in \mathbb{R} \\ \text{car pour } k > b_2, F_2(k) = 1}})$$

$$= F_1(x) \quad \text{et } F_1(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, on montre que $\forall y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = F_2(y)$ * si $b_2 = +\infty, F_1(x) \leq F_2(k)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Finalement, $F_X = F_1$ et $F_Y = F_2$

5/24

10) a) Soit $x \in [0; 1]$.

$U(x) = [0; 1]$ par définition de F_1 .

De plus,

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(F_1(X) \leq x) && \text{ } F_1 \text{ est hyetive q. 1.} \\ &= P(X \leq F_1^{-1}(x)) && \text{et croissante donc } F^{-1} \text{ aussi} \\ &= (F_1 \circ F_1^{-1})(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Donc $U \subset U([0; 1])$

Avec la méthode d'inversion rédemmentée, on retrouve de la même manière

$V \subset U([0; 1])$

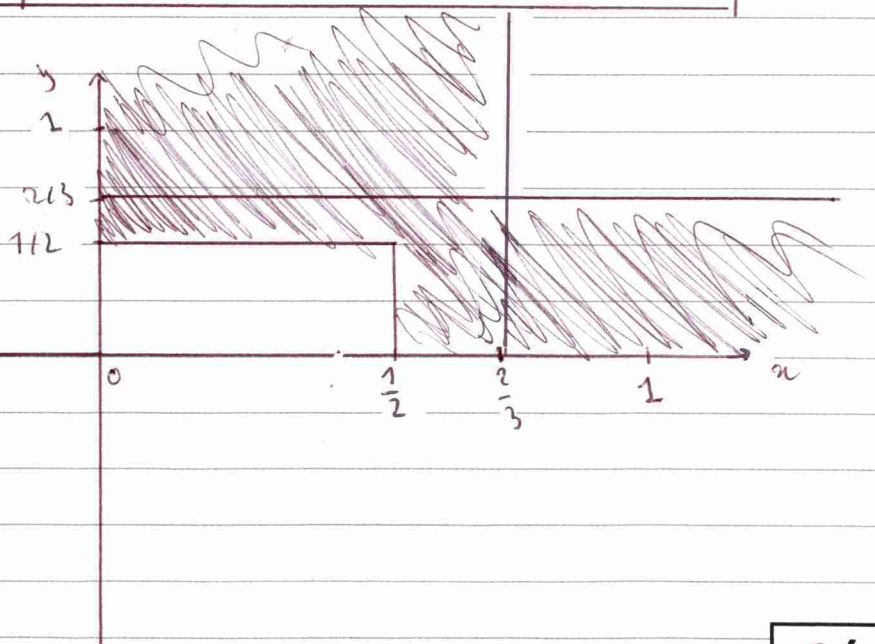
10) b) Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_{U;V}(x; y) = \min(F_U(x), F_V(y))$$

Donc

$$F_{U;V}(x; y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \min(x; y) & \text{pour } x < 1 \text{ ou } y < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

10) c)



10) d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

10) e) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 P\left(\mu - V > \frac{1}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\left[\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n}\right] \cap \left(V \leq \frac{k}{n}\right)\right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n}\right) \quad \swarrow \text{par inclusion d'événements} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \quad \searrow \text{par télescopage} \\
 &\leq 1 - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\mu - V > \frac{1}{n}) &\leq \sum_{k=1}^{n-1} P\left(\left[\frac{k}{n} < U \leq \frac{k+1}{n}\right] \cap \left(V \leq \frac{k}{n}\right)\right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}
 \end{aligned}$$

On admet que $P(\mu \leq V) = 1$ et que $P(\mu = V) = 1$.

10) f) Comme $P(\mu = V) = 1$ alors μ et V sont presque sûrement égaux.

Donc $F_1(X) = F_2(Y)$ presque sûrement
 $\Rightarrow X = F_1^{-1}(F_2(Y))$ ps car F_1 bijective (q1)

Donc: $X = F_1^{-1}(F_2(Y))$ ps.

11) on a montré avec la question 9 que

$$f_x = f_1 \text{ et } f_y = f_2$$

tandis qu'avec la question 10, on a que

$$f_1(x) = f_2(y) \text{ presque sûrement}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = f_1^{-1}(f_2(y)) \text{ ps} \\ y = f_2^{-1}(f_1(x)) \text{ ps} \end{cases}$$

En posant $g = f_1^{-1} \circ f_2$ et $h = f_2^{-1} \circ f_1$, par composition de fonctions croissantes (on la vérifie et de même variation que sa réciproque), on a g et h deux fonctions croissantes telles que $x = g(y)$ et $y = h(x)$ ps.

Ranc: $\exists (g, h)$ deux fonctions croissantes tel que $x = g(y)$ et $y = h(x)$

12) `import numpy as np`

`import numpy.random as rd`

`import scipy.special as sp`

`def Nvage1():`

`X = rd.normal(0, 1, 100)`

`Y = rd.exponential(1, 100)`

`plt.plot(X, Y)`

`plt.show()`

13) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

on sait que $f_x(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} f_{(x, y)}(x; R)$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \max(f_1(x) + f_2(R) - 1; 0)$$

on: $\exists R \in \mathbb{N}, f_1(x) + f_2(R) - 1 > 0$

Ranc: $f_x(x) = \lim_{R \rightarrow +\infty} f_1(x) + f_2(R) - 1$

$$= f_1(x) \text{ car } f_2 \in \mathcal{F}_{(a_2; b_2)}$$

• si b_2 est un réel: alors $\exists R \in \mathbb{N}, R > b_1$ et $\lim_{R \rightarrow +\infty} f_2(R) = 1$ par encadrement.

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies.		
	Consignes <ul style="list-style-type: none"> Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 		

• si $b_1 = +\infty$, alors par définition avec $f_2 \in \mathcal{F}(a_1; b_1)$ et croissance de f_2 .

De la même manière avec $y \in \mathbb{R}^2$,
 $\forall y \in \mathbb{R}, f_y(u_y) = f_2(y)$.

Donc: de la même manière qu'à la question 9, on a montré
 $f_1 = f_x$ et $f_y = f_2$

14) a) $\mathcal{U}(\Omega) = [0; 1]$
et $\forall u \in [0; 1], F_U(u) = P(F_1(X) \leq u) \stackrel{9.10.a)}{=} (F_1 \circ F_1^{-1})(u) = u$.

Donc: $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}([0; 1])$

$(1-V)(\Omega) = [0; 1]$.
 $\forall u \in [0; 1], F_{1-V}(u) = P(1-u \leq V) = P(F_2^{-1}(1-u) \leq Y) \stackrel{\text{car } Y \text{ est à densité}}{=} 1 - F_2(F_2^{-1}(1-u)) = u$.

Donc: $(1-V) \subset \mathcal{U}([0; 1])$

9/24

De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_{(U, 1-V)}(x, y) = \max(f_U(x) + f_V(y) - 1, 0)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ et } y < 0 \\ \max(x+y-1, 0) & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc:

$$f_{(U, 1-V)}: (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \max(x+y-1, 0) & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

14) b)

14) c) Comme $U = 1 - V$ ps

$$\Rightarrow f_1(x) = 1 - f_2(y) \quad \text{ps}$$

$\tilde{y} \in]a_2, b_2[$

car f_1 est bijective
(q. 1).

$$\Rightarrow X = f_1^{-1}\left(\underbrace{1 - f_2(y)}_{\in [0, 1]}\right)$$

Donc: $X = f_1^{-1}(1 - f_2(y))$ ps

15) On a que $X = f_1^{-1}(1 - f_2(y))$

et que $Y = f_2^{-1}(1 - f_1(x))$ par le même calcul.

On pose $g = f_1^{-1} \circ (1 - f_2)$ et $h = f_2^{-1} \circ (1 - f_1)$

on: la fonction $1 - f_2$ est décroissante (et bien à valeurs dans $(0;1)$)

Donc: son composition avec f_1^{-1} croissante, on a que g est décroissante,

De la même manière, on montre que h est décroissante.

Ainsi, on a montré que : il existe g et h décroissantes sur $]a_1; b_1[$ et $]a_2; b_2[$ respectivement tel que $X = g(Y)$ et $Y = h(X)$

16) def Nuage2()

$X = \text{rd.normal}(0, 1, 100)$

$Y = \text{rd.normal}(1, 2, 100)$

plt.plot(X, Y)

plt.show()

17) a) Correspond au nuage 2 car dans cet exemple on trouve que les variables X et Y sont centra marquées.

or: $X \in \mathcal{N}(0;1)$ et $Y \in \mathcal{N}(1,2)$ avec le 2nd exemple sont bien centra marquées.

b) Correspond au nuage 1 car $X \in \mathcal{N}(0;1)$ et $Y \in \mathcal{E}(1)$ sont caractéristiques avec le premier exemple

II. A)

18) Soit $(x; y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixes. On note g et h les fonctions paires

a) $g: t \mapsto \begin{cases} y_0 & \text{si } t \leq y_0 \\ t & \text{si } y_0 < t \end{cases}$ de l'incré avec f_1

or on voit bien que cette fonction est strictement croissante sur $[y_0; +\infty[$ car c'est une fonction affine de coefficient positif, et g est constante sur $] -\infty; y_0[$ et continue en y_0 .

Donc: g est croissante sur $\mathbb{R}$.

De la même manière, $h: t \mapsto \begin{cases} x_0 & \text{si } t \leq x_0 \\ t & \text{sinon.} \end{cases}$

Donc: avec les mêmes arguments on dit que

h_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

18) b) Si on prend $(a_1; a_2; b_1; b_2) = (0; 0; 3; 3)$, on a

$$f_1(a_1; b_2) + f_1(b_1; a_2) = 3 + 3 = 6$$

$$\text{et } f_1(b_1; b_2) + f_1(a_1; a_2) = 3 + 0 = 3.$$

Donc: $\exists (a_1; b_1; a_2; b_2) \in \mathbb{R}^4$, $f_1(a_1; b_2) + f_1(a_2; b_1) \geq f_1(a_1; a_2) + f_1(b_1; b_2)$
tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

Donc f_1 n'est pas 2-croissante

19) a) Soit $(a_1; a_2; b_1; b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$$f_2(a_1; b_2) + f_1(b_1; a_2) = a_1 b_2 + b_1 a_2$$

$$f_2(a_1; a_2) + f_2(b_1; b_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$\text{on: } a_1 \leq b_1 \quad \text{et} \quad b_2 \geq a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1(b_2 - a_2) \leq b_1(b_2 - a_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_1 a_2 \leq b_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\Leftrightarrow a_1 b_2 + b_1 a_2 \leq b_1 b_2 + a_1 a_2$$

$$\Leftrightarrow f_2(a_1; b_2) + f_2(b_1; a_2) \leq f_2(a_1; a_2) + f_2(b_1; b_2)$$

Donc: f_2 est 2-croissante

19) b) Pour $y = -1$, on a: $f_2: (x; y) \mapsto -x$.

Donc $t \mapsto f_2(t; -1)$ est décroissante.

2e) Ainsi, le fait d'être 2-croissante n'implique pas que en fixant une variable quelconque pour x ou y , la fonction à une variable obtenue sera croissante (q. 19). De même, même si les 2 fonctions à une variable (avec une fois ou puis une autre y fixe) sont croissantes, cela

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies		
Consignes <ul style="list-style-type: none"> • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 			

n° implique pas que la fonction à 2 variables est 2-croissante.

Il n'y a donc pas de lien entre la croissance des fonctions à une variable engendrées par une fonction à 2 variables et la 2-croissance de cette fonction à 2 variables.

21) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\partial_1 F(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} \quad \text{par définition de la dérivée (en } x)$$

Donc:

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x, y+t) - F(x+h, y) + F(x, y)}{ht} \right)$$

par définition de la dérivée et car F est de classe $\mathcal{C}^2$.

Donc:

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+t) - F(x, y+t) - F(x+h, y) + F(x, y)}{ht} \right)$$

21) b) Ainsi, $\forall (x, y) \in I \times J$, on retrouve la formule précédente.

or, comme F est deux fois croissante sur cet intervalle, comme I et J sont des ouverts on peut prendre $h > 0$ et $t > 0$ suffisamment petits pour que $x+h \in I$ et $y+t \in J$ (car I et J sont ouverts).

On appelle $H = \{h \in \mathbb{R}_+^*, x+h \in I\}$ et $T = \{t \in \mathbb{R}_+^* \mid y+t \in J\}$.

Donc: en prenant $a_1 = x$ et $b_1 = x+h$ et $a_2 = y$ et $b_2 = y+t$

on a bien que (avec les conditions $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$)

$$\forall (h, t) \in H \times T, F(x+h, y+t) + F(x, y) \geq F(x+h, y) + F(x, y+t)$$

Ceci équivaut à $\forall (x, y) \in I \times J$ et donc au voisinage de $(0, 0)$,
 on a que :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I \times J, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0}$$

22) a) F est C^2 donc $\partial_{1,2}^2 F$ est continue sur $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \right) dy &= \int_{a_2}^{b_2} [\partial_2 F(x, y)]_{a_1}^{b_1} dy \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \partial_2 F(b_1, y) - \partial_2 F(a_1, y) dy \\ &= [F(b_1, y)]_{a_2}^{b_2} - [F(a_1, y)]_{a_2}^{b_2} \\ &= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) - F(a_1, b_2) \end{aligned}$$

Enfinement : $\forall ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in I^2 \times J^2, a_2 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$.

$$\boxed{F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \right) dy}$$

22) b) Ainsi, f est 2-croissante $\Leftrightarrow \forall ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in I^2 \times J^2,$

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \right) dy \geq 0 \quad \downarrow \text{ car cela est vrai } \forall (a_2, b_2) \in I \times J$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in J, \int_{a_2}^{b_2} \partial_{1,2}^2 F(x, y) dx \geq 0 \quad \downarrow \text{ car cela est vrai } \forall (a_1, b_1) \in I \times J$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in J, \forall x \in I, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0$$

Donc : $\boxed{F \text{ est 2-croissante} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in I \times J, \partial_{1,2}^2 F(x, y) \geq 0}$

23) Soit $f_1: t \mapsto F(t, y)$ et $f_2: t \mapsto F(x, t)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$.

$$f_1(b) - f_1(a) = F(b, y) - F(a, y)$$

(B)

24) On sait donc que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$
 $f(w,v)(x,y) = C(x,y)$.

or, d'après la question 4 et 5, on a : (en réduisant $\mathbb{R}$ à $[0,1]$)
 $\forall x \in [0,1], f_v(x) = \lim_{y \rightarrow 1} C(x,y)$ car on prend des
valeurs uniquement
dans $[0,1]$
 $= \lim_{y \rightarrow 1} C(x,y)$
 $= x$.

Donc, $\boxed{u \in \mathcal{U}([0,1])}$

De la même manière, on montre que $\boxed{v \in \mathcal{U}([0,1])}$

25) Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} C^*(0,x) &= x-1 + C(1,1-x) \\ &= x-1 + 1-x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^*(x;0) &= x-1 + 1-x \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^*(1,x) &= x + C(0,1-x) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^*(x;1) &= x + C(1-x;0) \\ &= x. \end{aligned}$$

De plus, C est une fonction à valeurs réelles qui est bien définie sur $[0,1]^2$.

Et: $\forall (a_1, a_2; b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$

$$C^*(a_1, a_2) + C^*(b_1, b_2) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 - 2 + C(1-a_1, 1-a_2) + C(1-b_1, 1-b_2)$$

$$C^*(a_1, b_2) + C^*(b_1, a_2) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 - 2 + C(1-a_1, 1-b_2) + C(1-b_1, 1-a_2)$$

or: C est 2-croissante. Avec $1-a_1 \geq 1-b_1$ et $1-a_2 \geq 1-b_2$,
on a bien:

$$C(1-a_1, 1-a_2) + C(1-b_1, 1-b_2) \geq C(1-a_1, 1-b_2) + C(1-b_1, 1-a_2)$$

Donc: $C^*(a_2, b_2) + C^*(b_1, a_2) \leq C^*(a_1, a_2) + C^*(b_1, b_2)$.

Donc C^* est 2-croissante.

Donc: finalement, C^* est bien une copule.

26) a) Soit $(v; u_1, u_2) \in [0, 1]^3$ tel que $u_1 \leq u_2$.

On prend les couples $(u_2; v)$ et $(u_2; 1)$ tel que $v \leq 1$ car $v \in [0, 1]$.

Ainsi, comme C est 2-croissante

$$C(u_2, v) + C(u_2, 1) \geq C(u_2, v) + C(u_1, 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car} \\ C \text{ est} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow C(u_2, v) + u_2 \geq C(u_2, v) + u_1 \quad \text{une copule}$$

$$\Rightarrow u_2 - u_1 \geq C(u_2, v) - C(u_1, v).$$

De plus, si on prend les couples $(u_1; 0)$ et $(u_2; v)$, avec $v \geq 0$, on a: comme C est 2-croissante

$$C(u_1, 0) + C(u_2, v) \geq C(u_1, v) + C(u_2, 0) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car} \\ C \text{ est} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow C(u_2, v) - C(u_1, v) \geq 0 \quad \text{une copule.}$$

Ceci étant vrai pour tout $v \in [0, 1]$ et pour tout $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement QR Code	Code épreuve : 283	Nombre de pages :	Session : 2026
	Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies.		
Consignes <ul style="list-style-type: none"> • Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroté chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre 			

tel que $u_1 \leq u_2$, on a :

$$\boxed{\forall (v, u_1, u_2) \in [0, 1]^3, u_1 \leq u_2 \Rightarrow 0 \leq C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1}$$

En prenant les mêmes couples, comme $\forall n \in [0, 1]$,

$C(n, 0) = C(0, n)$ et $C(1, n) = C(n, 1)$, on retrouve, de la même manière,

$$\boxed{\forall (v, v_1, v_2) \in [0, 1]^3, v_1 \leq v_2 \Rightarrow 0 \leq C(v, v_2) - C(v, v_1) \leq v_2 - v_1}$$

26) b) on a alors, $\forall (u_2, v_1, v_2, u_1) \in [0, 1]^4$, tel que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) \leq u_2 - u_1 & L_1 \\ \text{et } 0 &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq u_2 - u_1 & L_2 \\ \text{et } 0 &\leq C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1) \leq v_2 - v_1 & L_3 \\ \text{et } 0 &\leq C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) \leq v_2 - v_1 & L_4 \end{aligned}$$

$L_2 + L_3$ nous donne alors

$$0 \leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) \leq u_2 - u_1 + v_2 - v_1.$$

Alors, si on ne pose pas la condition $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a

$$\boxed{|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|}$$

26) c) Soit $(u, v) \in [0, 1]^2$

Alors:

$$\lim_{(n,y) \rightarrow (u,v)} |x-u| + |y-v| = 0$$

car la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, et par somme, et a cela.

Donc: par encadrement,

$$\lim_{(n,y) \rightarrow (u,v)} |C(u,v) - C(n,y)| = 0$$

Donc: $\lim_{(n,y) \rightarrow (u,v)} C(n,y) = C(u,v).$

Donc: ceci équivaut à $\forall (u,v) \in [0,1]^2$, C est continue sur $[0,1]^2$

III - A)

27) a) Soit $(n,y) \in]0,1[\times \mathbb{C}^2$.

Alors, $C(n,y) = F_{X,Y}(F_X^{-1}(n); F_Y^{-1}(y))$

$$= P(X \leq F_X^{-1}(n) \cap (Y \leq F_Y^{-1}(y))) \quad \downarrow \text{ par croissance de } F_X \text{ et } F_Y$$

$$= P(F_X(X) \leq n \cap (F_Y(Y) \leq y)).$$

Donc: $\forall (n,y) \in]0,1[\times \mathbb{C}^2$, $C(n,y) = P(\underbrace{F_X(X)}_{\in [0,1]} \leq n \cap (F_Y(Y) \leq y))$

• Si $n=1$, alors $\forall y \in]0,1[$, $P(F_X(X) \leq 1 \cap (F_Y(Y) \leq y))$

$$= P(\Omega \cap F_Y(Y) \leq y)$$

$$= P(Y \leq F_Y^{-1}(y))$$

$$= y = C(n,y)$$

• Si $y = 1$, on retrouve bien, de la même manière, que $\forall x \in]0;1[$,
 $C(x; y) = P((F_X(X) \leq x) \cap (F_Y(Y) \leq y))$

Pour $x = 0$: $P(\underbrace{(F_X(X) \leq x)}_{\in [0;1]} \cap (F_Y(Y) \leq y)) = P(\emptyset \cap F_Y(Y) \leq y) = 0$.

De même pour $y = 0$.

Pour: $\forall (x; y) \in [0;1]^2, C(x; y) = P((F_X(X) \leq x) \cap [F_Y(Y) \leq y])$

27) b) Si on prend $(a_1; b_1; a_2; b_2) \in [0;1]^4$, $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$ on a que

$$[(F_X(X) \leq a_1) \cap (F_Y(Y) \leq b_2)] \subset [(F_X(X) \leq b_1) \cap (F_Y(Y) \leq b_2)]$$

$$\text{et } [(F_X(X) \leq b_1) \cap (F_Y(Y) \leq a_2)] \subset [(F_X(X) \leq a_2)$$

Pour la question 7, on a que $F_X(x); F_Y(y)$ est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$.

Pour, comme $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, C(x; y) = F_{(X; Y)}(x; y)$,

C est 2-croissante sur $\mathbb{R}^2$.

27) c) On a que C est 2-croissante définie sur $[0;1]^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus: $\forall x \in [0;1]$

- $C(0; x) = 0$

- $C(x; 0) = 0$

- $C(x; 1) = x$

- $C(1; x) = x$.

Pour C est bien une copule

28) On remarque que pour C définie dans q. 27, on a que
 $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} C(F_X(x); F_Y(y)) &= P((F_X(X) \leq F_X(x)) \cap (F_Y(Y) \leq F_Y(y))) \\ &= P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) \\ &= F_{(X; Y)}(x; y). \end{aligned}$$

Pour, il existe au moins une telle copule.

De plus, on suppose qu'il a C_1 et C_2 deux capules qui vérifient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F_{C_1, C_2}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$

Alors: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, C_1(F_X(x), F_Y(y)) = C_2(F_X(x), F_Y(y))$
 or F_X et F_Y recouvrent tout $]0,1[$ car ce sont des fonctions de répartition donc, $\forall (u,v) \in]0,1[^2, C_1(u,v) = C_2(u,v)$.

on: C_1 et C_2 sont des capules donc on peut généraliser sur $[0,1]^2$ avec des propriétés sur des valeurs en 0 et 1.

Finalement, $\forall (x,y) \in [0,1]^2, C_1(x,y) = C_2(x,y)$
 $\Rightarrow C_1 = C_2$.

Donc: il existe une unique capule C telle que
 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F_{C, C}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$

29) De la même manière qu'à la question 9 et 13, on utilise la question 5 et on prouve bien
 que $F_{X1} = F_1$ et $F_{X2} = F_2$

(B)

30) ✓

31) ✓

(C)

32) a) g est dérivable sur $(0,1)$ et $\forall \theta \in (0,1)$,

$$g'(\theta) = 2\ln(u_2)\ln(v_2)\theta - (1 + \ln(u_2) + \ln(v_2))$$

Donc: $g'(\theta) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2\ln(u_2)\ln(v_2)\theta \geq 1 + \ln(u_2) + \ln(v_2)$$

$$\Leftrightarrow \theta \geq \frac{1 + \ln(u_2) + \ln(v_2)}{2\ln(u_2)\ln(v_2)}$$

car $\ln(u_2)\ln(v_2) > 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 467717

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 283

Nombre de pages :

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques 2 Approfondies

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

finalement :

x	0	θ_*	1
g'		- 0 +	
g			

$$32) b) g(\theta_*) = \frac{(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1))^2}{4 \ln(v_1) \ln(u_1)} - \frac{(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1))^2}{2 \ln(v_1) v_1} + 1$$

$$= 1 - \frac{(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1))^2}{4 \ln(v_1) \ln(u_1)}$$

on : $\forall (u_1, v_1) \in (0,1)^2,$

$$(1 + \ln(u_1) + \ln(v_1))^2 \leq 4 \ln(v_1) \ln(u_1) \text{ après une étude de la fonction}$$

Penc : $g(\theta_*) \geq 0.$

Penc : comme, $\forall x \in (0,1), g(x) \geq g(\theta_*)$

On a, $\boxed{\forall x \in (0,1), g(x) \geq g(\theta_*)}$

33) ✓

34) ✓

35) On admet les résultats de la question 34.

Donc on a que C_0 est 2-coérisable.De plus, elle est définie sur $(\mathbb{C}^*)^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- $C_0(x; 0) = C_0(0; x) = 0$
- $C_0(x; 1) = x \times 1 e^{-\ln(1) \ln(x)} = x e^0 = x.$
- $C_0(1; x) = x.$

Donc: On a prouvé que C_0 est une copule.

36) On remarque alors que pour $f_x: x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $f_y: y \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a que $F_{(X,Y)}(x,y) = C_0(f_x(x); f_y(y)).$
 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$

Donc, comme cette combinaison est unique on a que X admet pour fonction de répartition f_x et Y f_y .

Donc: $X \in \mathcal{E}(1)$ et $Y \in \mathcal{E}(2)$

FIN

