Copie anonyme - n°anonymat : 631525

W0-00040 631525 Mat Appli

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1.

1)
```
def suite_u(a, n):
    u = a
    for k in range(1, k+1):
        u = (u**2) - u + 1
    return(u)
```

2) Soit (u_n) convergente.

Donc il existe ℓ tel que, par passage à la limite de l'expression de (u_n) :

$\ell = \ell^2 - \ell + 1 \iff 0 = (\ell-1)^2$ D'unique solution $\ell = 1$

Donc si (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

3)a) On calcule $u_n - u_{n+1} = u_n - u_n^2 + u_n - 1 = -u_n^2 + 2u_n - 1$
$= -(u_n - 1)^2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Or, $(u_n - 1)^2 \geq 0$

Donc $u_n - u_{n+1} \leq 0 \iff u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) On a (u_n) croissante. Or, $u_0 = a$

Donc on a bien $u_n \geq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$

c) Comme $a > 1$, et (u_n) est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_n > 1$

Donc $\ell = 1$ ne peut être une limite de cette suite.
Comme c'est la seule limite possible, alors on en déduit que (u_n) est divergente.

Comme (u_n) diverge et est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4) On a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2} - \dfrac{u_n}{u_n^2} + \dfrac{1}{u_n^2} = 1 - \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2}$ $(u_n > 0)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n^2} = 0$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ (somme de limites)

On en déduit : $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n^2$

5) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

Donc $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe bien.

Et vaut :

$$\frac{u_n}{u_n^2 - u_n} - \frac{1}{u_n^2 - u_n} = \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n}$$

6) Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1}-1} = \frac{1}{u_0-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$ [par télescopage]

$$= \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$$

c) Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n-1}} = 0$

Alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$ d'après le résultat précédent.

6) a) $a=2$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ ssi

$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = 1$

Or, d'après les résultats précédents, on a bien

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2-1} = 1$

Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

6) Supposons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n+1} \leq 2^n(2^n-1)+1$

$\iff 2^{n+1} \leq 2^{n+1} - 2^n + 1$

$\iff 0 \leq 1 - 2^n$ ce qui est faux

erreur dans l'énoncé ?

c) ?

d) ?

Exercice 2

1) a) Ce théorème de Cauchy-Lipsisch assure qu'il n'y a qu'une unique solution telle que ce système est vérifié.

b) On sait que $f'(x) = f(x) - 2g(x)$.

Comme f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors

$f''(x)$ existe et vaut $f'(x) - 2g'(x)$

Même chose pour $g'(x)$

2) a) On a: $y'' - 6y' + 9y \iff 3f(x) - 6f(x) + 12g(x) + f'(x) - 2g'(x)$

$= 3f(x) + 12g(x) + f(x) - 2g(x) - 6f(x) - 10g(x)$

$= 0$

On a bien f solution de $y'' - 6y' + 9y = 0$

b) $f'(0) = f(0) - 2g(0) = \underline{1 - 2 \times 1 = -1}$

c) On reconnaît le polynôme associé à l'équation donnée:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$ D'unique racine $x = 3$

Donc $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{3x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$

Comme $f(0) = 1$, $f(0) = 1 = \mu e^0$ Donc $\mu = 1$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 631525

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 5 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

On calcule $f'(x) = \lambda e^{3x} + 3(\lambda x + 1)e^{3x}$

$f'(0) = \lambda + 3 = -1$

Donc $\lambda = -4$

On a donc : $f(x) = (1-4x)e^{3x}$

d) On a donc :

$f'(x) = f(x) - 2g(x)$

$\Leftrightarrow -4e^{3x} + 3(1-4)e^{3x} = (1-4x)e^{3x} - 2g(x)$

$\Leftrightarrow -4e^{3x} + 2(1-4x)e^{3x} = -2g(x)$

$\underline{g(x) = 2e^{3x} - (1-4x)e^{3x}} = 4xe^{3x} + e^{3x} = e^{3x}(4x+1)$

3) $g'(x) = 2f(x) + 5g(x)$

$\Leftrightarrow g'(x) + f'(x) = 2f(x) + 5g(x) + f(x) - 2g(x)$

$\Leftrightarrow \underline{h'(x) = 3h(x)}$ D'après la définition de h.

On a bien $S \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$

6) $h(0) = f(0) + g(0) = 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = 3h(x) \iff h(x) = \lambda e^{3x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $h(0) = 2$,
$\lambda e^0 = 2 \iff \lambda = 2$

Donc $h(x) = 2e^{3x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) D'après la définition de $f'(x)$:

$f'(x) = f(x) - 2g(x) = f(x) + 2f(x) - 2(f(x) + g(x)) = \underline{3f(x) - 2(2e^{3x})}$

$h'(x) = 6e^{3x}$ (dérivable comme somme de fonctions dérivables)

Donc, comme $h'(x) = 3h(x)$:

$3h(x) = 6e^{3x} \iff h(x) = 2e^{3x} \iff \underline{(f+g)(x) = 2e^{3x}}$

4) a) Soit $f_a(x) = axe^{3x}$
$f_a'(x) = ae^{3x} + a3xe^{3x}$ $(u = ax,\ v = e^{3x})$

On cherche a tel que :

$ae^{3x} + 3axe^{3x} = a3xe^{3x} - 4e^{3x} \iff ae^{3x} = -4e^{3x}$

On a :

$\underline{a = -4}$

b) Donc, en reprenant les contraintes du système S :
on a bien $f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x}$

On doit encore ajouter à la solution particulière que l'on a déterminé la solution homogène de l'équation différentielle $y' = 3y$, soit $x \to \lambda e^{3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $f : x \to e^{3x} - 4xe^{3x} = (1-4x)e^{3x}$ est solution ($\lambda = 1$ car $f(0) = 1$)

c) En reprenant le système S initial, on a :

$$f'(x) = f(x) - 2g(x)$$

$$\Leftrightarrow -4e^{3x} + 3e^{3x} - 12xe^{3x} = (1-4x)e^{3x} - 2g(x)$$

$$\Leftrightarrow -e^{3x} - e^{3x} - 4e^{3x} = -2g(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = e^{3x} + 4xe^{3x} = \underline{e^{3x}(1+4x)}$$

5) a)
```
def f(x):
    return ( np.exp(3*x) * (1 - 4*x))

def g(x):
    return (np.exp(1 + 4*x))
```

6)
```
def ( courbe_f_g):
    A = [f(x) for x in np.linspace(-1/2, 1/2, 100)
    B = [g(x) for x in np.linspace(-1/2, 1/2, 100)
    C = [x for x in np.linspace(-1/2, 1/2, 100)
    plt.plot(C, A)
    plt.plot(C, B)
    plt.show()
```

Exercice 3.

1) a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\emptyset} & \text{si } x \in [0, \emptyset] \\ 1 & \text{si } x > \emptyset \end{cases}$$

6) $E(X) = \frac{\theta}{2}$ Car $X \subset U[0, \theta]$

$V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

2) a) $[Y_n \leq x] = [\bigwedge_{i=1}^{n} [X_i \leq x]]$ (le max de n variables X_i est inférieur à x ssi tous les X_i sont inférieurs à x)

$P(Y_n \leq x) = P[\bigwedge_{i=1}^{n} (X_i \leq x)]$

$= \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq x]$ Car X_i sont indépendantes avec $i \in [1, n]$

On en déduit :

$$F_n(x) = P(Y_n \leq x) = \begin{cases} 0^n = 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1^n = 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) La fonction $x \to \frac{x^n}{\theta^n}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale

La fonction nulle est C^1 sur $\mathbb{R}$

La fonction $x \to 1$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Donc F_n est C^1 sur $]-\infty, 0[$, $]0, \theta[$ et $]\theta, +\infty[$.

Enfin, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^n}{\theta^n} = 0$

$\lim_{\substack{x \to \theta \\ <}} \frac{x^n}{\theta^n} = 1$

Comme la fonction F_n est continue en 0 et 1, et C^1 en dehors de ces points, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
C'est donc bien une fonction de répartition d'une variable

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 631525

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 5 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques EDHEC appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

à densité.

Cette densité vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{sur } \mathbb{R}\setminus[0,\theta] \\ \frac{n}{\theta^n}(x)^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

3) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$

$$F(x(\theta U) = F\left(\frac{x}{\theta}(U\right) \quad \text{car } \theta > 0$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta] \quad (\text{car } 0 \leq \frac{x}{\theta} \leq 1) \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

En reprenant les caractéristiques de la loi uniforme sur $(0,1)$, on retrouve F, fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,\theta]$

On a bien, avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$, $\theta U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,\theta]$

6)
```
def var_Y(theta,n):
    X = theta * rd.random(n)
    Y = np.max(X)
    return Y
```

4) a) Y_n admet une espérance ssi :

$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,dx$ converge. , avec $f_n(x)$ continue sur $[0, \theta]$

Soit $\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,dx$ (Car $f_n(x) = 0$ avec $x \notin [0, \theta]$, avec la relation de Chasles)

Or, comme $x \to x^n$ est continue sur $[0, \theta]$, cette intégrale converge donc $E(Y_n)$ existe bien

Elle vaut : $\frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^{n+1}}{\theta^n(n+1)} = \frac{n\theta}{n+1} = E(Y_n)$

b) De même, $x \to x^2$ est continue et $f_n(x) = 0$ avec $x \notin [0, \theta]$ donc $E(Y_n^2)$ converge et vaut :

$\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n\theta^{n+2}}{\theta^n(n+2)} = \frac{n\theta^2}{n+2}$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = -\frac{(n\theta)^2}{(n+1)^2} + \frac{n\theta^2}{n+2}$

$= -\frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{n^3\theta^2 + 2n^2\theta^2 + n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

5) a) On admet que $2n$ est un estimateur de θ

$E(2n) = E\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right) = \frac{n+1}{n}E(Y_n)$ (linéarité de l'espérance)

$= \frac{n+1}{n}\,\frac{n\theta}{n+1} = \theta$

6) $V(Z_n) = V\left(\frac{n+1}{n} Y_n\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

6) a) $0 \leqslant \theta \leqslant 7$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \theta^2 \leqslant 49 \leqslant 2+n$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{\theta^2}{2+n} \leqslant 1$ Division par un réel strictement positif.

b) $P(|Z_n - E(Z_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}$

Soit : $P(|Z_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

On a donc, comme $P(A) = 1 - P(\bar{A})$:

$1 - P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \leqslant \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \leqslant P(|Z_n - \theta| < \varepsilon)$

Si $n \geqslant 49$, alors $\frac{\theta^2}{n+2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2(n+2)} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$

Donc $-\frac{1}{n\varepsilon^2} \leqslant -\frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \leqslant P(|Z_n - \theta| < \varepsilon)$

c) Si $n \geqslant 2000$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{10}$, on a :

$P(|Z_n - \theta| \leqslant \frac{1}{10}) \geqslant 1 - \frac{1}{\frac{n}{100}} = 1 - \frac{100}{n} \geqslant 0,95$ avec $n \geqslant 2000$

7) Ce code renvoie la moyenne empirique de la proposition de 1000 variables Z_{2000} telles que $|Z_{2000} - \theta| < 0,1$

Ce résultat devrait ainsi être compris entre $0,95$ et 1, d'après les résultats précédents.

Problème:

1) a) Si $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ avec chaque côté de longueur n,

alors $J_n^2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} 1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} 1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = n J_n$

Et donc on a bien $J_n^2 = n J_n \iff J_n(J_n - n) = 0$

On en déduit le polynôme annulateur:
$P(x) = x^2 - nx$

b) J_n est diagonalisable car symétrique.

Supposons J_n possède une unique valeur propre.

On pourrait alors écrire $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = k I_n$
et donc $J_n = k P P^{-1} = k I_n$ ce qui est faux.

Supposons J_n possède 3 valeurs propres au plus.

Comme J_n est diagonalisable, il existe une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des sous-espaces propres de J_n.

Or, $E_0(J_n) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Sous-espace propre de dimension $n-1$, formant une famille libre

et $E_n(J_n) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ Sous-espace propre de dimension 1.

Comme les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (n et 1) forment une famille libre, on a bien une famille libre de n vecteurs propres formant donc une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si J_n a une (ou plusieurs) valeurs propres supplémentaires, alors la somme des dimensions des sous-espaces propres

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 631525

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 5 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques EDHEC appliquées

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

excède l'ordre de la matrice. Ce qui est impossible, notre supposition est fausse.
Donc S_n ne possède pas plus de 2 valeurs propres.

(Je me rend compte que j'aurais juste pu employer les racines de A)

c) On résout le système:

$$S_n X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} x_i \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$$ (ce qui est vérifié ssi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (admis)

d) On a donc bien $S_n X = nX$, avec $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ unique solution.

Donc $E_n(S_n) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Partie 2:

2) a) Ce graphe dispose de quatre sommets, tous de degré 2.
Donc ce graphe appartient bien à $\mathcal{E}_6(2)$. (Et chaque sommet est atteignable en deux étapes, $D=2$)

b) G_1 est d'ordre 5, de degré max 2 et de diamètre 2. $G_1 \in \mathcal{E}_5(2)$

G_2 a un sommet de degré 4 (sommet 1). $G_2 \notin \mathcal{E}_5(2)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

G_3 répond à tous les critères, $G_3 \in E_5(2)$

G_4 est de diamètre 4, (sommets 3 et 5). $G_4 \notin E_5(2)$

3) a) Comme $G \in E_n(d)$, chaque sommet est de degré inférieur ou égal à d, et donc a d voisins au maximum.

b) Comme $D = 2$ et que chaque point est au maximum relié à d autres points, on peut, avec 2 mouvements, aller au maximum à $d + d(d-1)$ points, car :

Le premier mouvement ouvre la voie à d sommets au maximum, le deuxième ouvre la voie à $d(d-1)$ sommets (chacun des d sommets est au maximum relié à d sommets nouveaux moins celui depuis lequel l'on vient).

D'où $d + d(d-1)$ est le nombre maximal de sommets d'un graphe de $E_n(d)$ $\Rightarrow n \leq d + d(d-1)$

c) Donc $\underline{n \leq d + d^2 - d = d^2 \leq d^2 + 1}$

Partie 3.

1) A est symétrique car le graphe auquel elle est associée est non orienté

2) a) Par définition d'une matrice d'adjacence, tout coefficient de A prend la valeur 0 ou 1.

$a_{i,j} = 0$ s'il n'y a pas de sommet reliant les points i, j

$a_{i,j} = 1$ sinon.

b) Comme G est un graphe simple, il n'a pas de boucles et donc la diagonale de A est nulle.

6) a) $B = A^2$ Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad AA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} a_{i,1} & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(car A est symétrique)

On a montré pour $b_{1,1}$ que $b_{1,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} a_{1,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} a_{1,i}$

Cela se retrouve pour chaque coefficient de $b_{i,j}$: on a à chaque fois :

$$\underline{b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k}}$$

6) En reprenant le résultat précédent,

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2$$

Or, comme $a_{i,k}$ est à valeurs dans $\{0; 1\}$, alors

$a_{i,k}^2 = a_{i,k}$ car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$

On a donc bien $\underline{b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}}$

Donc $b_{i,i}$ est la somme des coefficients d'une ligne de A (la ligne i).

Or, comme tous les sommets de G sont de degré d, chaque somme de ligne de A vaut d.

On a bien $\underline{b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = d}$

7) a) Admis

b) On en déduit que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} + b_{i,j} = 1$

Partie 4.

9) A est diagonalisable car symétrique, car G est non orienté.

10) a) La somme de chaque ligne de A vaut d.

Donc $AU = dU$, car $AU = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\hat{}} a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\hat{}} a_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \times d$.

Or $U \neq 0$

b) Comme on a bien $AU = dU$, et $U \neq 0$, alors d est une valeur propre de A.

11) a) On a : $AX = \lambda X$

$\Leftrightarrow AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$

$\Leftrightarrow A^2 X = \lambda^2 X$

En reprenant le résultat de la question 9), on a

$A^2 X + AX = (d-1)X + f_n X$

$\Leftrightarrow \lambda^2 X + \lambda X = (d-1)X + f_n(X)$

$\Leftrightarrow f_n(X) = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X$

b) Comme tous les sommets de G sont reliés, toutes les colonnes de A sont constituées au moins d'une valeur et donc

U est la seule solution à $AX = dX$ (toutes les sommes des valeurs sur la colonne valent d d'après la définition de G).

Donc si $\lambda = d$, $X \in \text{Vect}(U)$, de dimension 1.

c) $\lambda^2 + \lambda - d + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d + 1 = d^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - d^2 - d = 0$

$\Delta = 1 + 4(d(d+1))$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 631525

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298

Nombre de pages : 5

Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc $r_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4d(1-m)}}{2}$

$r_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4d(1-m)}}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094