Copie anonyme - n°anonymat : 385952

W8-00065 385952 Mat Appli

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 1 :

1)

```
u = a
for k in range (1, n+1) :
        u = u**2 - u + 1
return u
```

2) Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

La fonction $f : x \longmapsto x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

On a donc, d'après le théorème du point fixe :

$f(\ell) = \ell \iff \ell^2 - \ell + 1 = \ell$

$\iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0$

$\iff (\ell - 1)^2 = 0 \iff \ell = 1$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $l = 1$.

3) a)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1$

$= (u_n - 1)^2 \geq 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) b)

Comme $u_0 = a$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors, ~~par récurrence immédiate~~ :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 = a$

3) c)

Par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers 1. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$

Or :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a > 1$

Ce qui est absurde donc (u_n) diverge.

De plus, comme (u_n) diverge avec un premier terme positif et qu'elle est croissante, alors la seule limite possible de (u_n) est :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

4)

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n^2 - u_n + 1$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^2 - u_n + 1}{u_n^2} = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}$$

$$= 1$$

car $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On en conclut :

$$u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$$

5) a)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a > 1 \iff u_n - 1 > 0$

et donc :

$u_{n+1} - 1 > 0$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n(u_n - 1)}$$

$$= \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)}$$

$$= \frac{1}{u_n}$$

5) b) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{k+1} - 1}$$

Par linéarité de la somme.

Par télescopage, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 39 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

5) c)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$$

$$= \frac{1}{a-1}$$

car $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty$.

Donc $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{u_{k^*}}$ converge et vaut $\frac{1}{a-1}$

6) a) On suppose $a = 2$.

On pose :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = \frac{1}{u_n}$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{1} = 1$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$ donc

$0 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 1$ donc on définit

bel et bien une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

6) b)

$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $2^n(2^n-1)+1 - 2^{n+1}$

$= 2^n[2^n - 1 - 2] + 1$

$= 2^n[2^n - 3] + 1$.

Or :

$\forall n \geqslant 2$, $2^n \geqslant 3$ (car $2^2 = 4 > 3$.

Donc, par produit et somme de termes positifs :

$\forall n \geqslant 2$, $2^n(2^n-1)+1 - 2^{n+1} \geqslant 0$

$\iff 2^n(2^n-1)+1 \geqslant 2^{n+1}$.

6) c)

~~Je me concentre sur la première inégalité.~~

- Pour $n=0$:

$u_0 = 2 \geq 2^0 = 1$

- Pour $n=1$:

$u_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3 \geq 2$

- Par récurrence, montrons que :

$\forall n \geq 2$, $u_n \geq 2^n$.

Initialisation : $n = 2$:

$u_2 = 3^2 - 3 + 1 = 7$ or $2^2 = 4$

Donc $u_2 \geq 2^2$. La propriété est initialisée.

Hérédité :

Soit $n \geq 2$ fixé. Supposons que $u_n \geq 2^n$.
Montrons que $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$.
On a :

$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$

$= u_n(u_n - 1) + 1$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$u_n(u_n - 1) + 1 \geq 2^n(2^n - 1) + 1$

car $u_n \geq 2^n$.

D'où :

$u_{n+1} \geq 2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1}$

d'après 6) b).

~~car~~ Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion :

Nous avons montré par récurrence que :

$\forall n \geq 2, u_n \geq 2^n$

Ce qui est également vrai sur $\mathbb{N}$.

6) d)

On en déduit, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall n \geq 0, \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \times \frac{1}{u_n} \leq n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On reconnait ici le terme général

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

d'une série géométrique dérivée première ~~à termes positi~~ dans elle converge.
Par critères de comparaison de 2 séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} n\frac{1}{u_n}$ converge donc $E(X)$ existe.

- De même :

$$\forall n \geq 0,\ n^2 \times \frac{1}{u_n} \leq n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{u_n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + (n-1)(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{u_n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + (n-1)(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$$

Or, par somme de 2 séries géométriques et 1 géométrique dérivée seconde convergente, $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n + n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$ converge. Par critère de comparaison de 2 séries à termes positifs, on en déduit que

$\sum_{n\geq 0} n^2 \frac{1}{n!}$ converge donc X admet une variance.

Exercice 2 :

1) a) le problème s'apparente à un problème de Cauchy avec solutions initiales donc il admet un seul couple (f, g) solution.

1) b)

f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Or f' et g' sont fonctions de f et g. Donc f' et g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

f et g sont donc 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x)$

$= f'(x) - 2g'(x) - 6f'(x) + 9f(x)$

$= -5f'(x) - 2(2f(x) + 5g(x)) + 9f(x)$

$= -5f(x) + 10g(x) - 4f(x) - 10g(x) + 9f(x)$

$= 0$

Donc f est solution de (E).

2) b)

$f'(0) = f(0) - 2g(0)$

$= 1 - 2$

$= -1$

2) c)

f est solution de (E). On résout l'équation caractéristique $r^2 - 6r + 9 = 0$:

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow (r-3)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 3$.

Donc :

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (\lambda + \mu x)e^{3x}$

Déterminons λ et μ :

On résout :

$$(S) : \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu + 3\lambda = -1 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -4 \end{cases}$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1 - 4x)e^{3x}$$

2) d)

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) - 2g(x)$$

$$\iff g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f'(x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-4x)e^{3x} + 4e^{3x} - (3-12x)e^{3x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{3x}\left[8x + 2\right]$$

$$= e^{3x}\left(4x + 1\right)$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | **Nombre de pages :** 39 | **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

3) Soit $h = f + g \Leftrightarrow f = h - g$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(S_1) : \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2f(x) + 5g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ g'(x) = 2h(x) - 2g(x) + 5g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ -f'(x) + h'(x) = 2h(x) + 3g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 2h(x) + 3g(x) + f(x) - g(x) - 2g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = f(x) - 2g(x) \\ h'(x) = 3h(x) \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3) b)

• $h(0) = f(0) + g(0)$

$= 2$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $h : x \longmapsto \lambda e^{3x}$ sont les solutions à l'équation $h'(x) = 3h(x)$.

On en déduit :

$h(0) = 2 \iff \lambda = 2$.

D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = 2e^{3x}$

3) c)

Comme $g = h - f$, on en déduit :

$\forall x \in \mathbb{R}, \; g(x) = 2e^{3x} - f(x)$.

D'où :

$$(S) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(x) = f(x) - 4e^{3x} + 2f(x) \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} f'(x) = 3f(x) - 4e^{3x} \\ (f+g)(x) = 2e^{3x} \end{cases}$$

4) a) Soit (ED) : $y' = 3y - 4e^{3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Et, pour $a \in \mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = axe^{3x}$

On a :

$$f'_a(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x}$$

En posant $a = -4$, on a bien :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = 3f_a(x) - 4e^{3x}$

Donc f_{-4} est une solution particulière de (ED)

4) b)

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $x \mapsto \lambda e^{3x}$ ~~sont les fonct~~ est la solution à l'équation homogène $y' = 3y$.

On en déduit que f est la somme d'une solution particulière et de la solution à l'équation homogène donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^{3x} - 4xe^{3x}$.

Or :

$f(0) = 1 \iff \lambda = 1$.

D'où :

$\forall x \in \mathbb{R}, \underline{f(x) = e^{3x} - 4xe^{3x}}$

4) c) On a donc :

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2e^{3x} - e^{3x} + 4xe^{3x}$

$\underline{= 4xe^{3x} + e^{3x}}$.

Et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \underline{f(x) = e^{3x} - 4xe^{3x}}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 39 **Session :** 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

S1 a)

```
def f(x):
    return np.exp(3*x) - 4*np.exp(3*x)

def g(x):
    return np.exp(3*x) + 4*np.exp(3*x)
```

S1 b)

```
x1 = np.linspace(-0.5, 0.5, 100)
y1 = [f(x) for x in x1]
y2 = [g(x) for x in x1]
plt.plot(x1, y1)
plt.plot(x1, y2)
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Exercice 3 :

1) a)

~~$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\theta} dt$~~

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

1) b)

$E(X) = \frac{\theta}{2}$; $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$

2) a) Soit $n \geq 2$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = P(Y_n \leq x)$

$= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x)$

$= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right)$

$$= \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x)$$ Par indépendance des $(X_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$.

$$= \prod_{k=1}^{n} F(x)$$

$$= [F(x)]^n$$

$$= \begin{cases} \frac{x^n}{\theta^n} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

2) b)

On a donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x$$

~~$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{x}$~~

Donc $\lim_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$. Donc Y_n est une variable à densité et on a, d'après le théorème fondamental de l'analyse, comme sa densité est continue sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = F_n'(x)$

$$= \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On pose $V = \theta U$ et f_V sa fonction de densité.

- V prend ses valeurs dans $[0, \theta]$.
- $\forall x \in [0, \theta]$, $f_V(x) = P(V = x)$

$$= P(\theta U = x)$$

$$= P\left(U = \frac{x}{\theta}\right) \text{ car } \theta \neq 0.$$

$$= f_U\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où $\theta U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, \theta])$

3) b)

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques appliquées EDHEC

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

```
def var_Y(theta, n):
    X = theta * rd.random(n)

    Y = max(X)
    return Y
```

4) a)

Sur $]-\infty, 0[\cup]\theta, +\infty[$, $f_n(x) = 0$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ converge et vaut $\int_0^{\theta} t f_n(t)\,dt$. Donc $E(Y_n)$ existe et on a :

$$E(Y_n) = \int_0^{\theta} t f_n(t)\,dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} t^n\,dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$= \frac{\theta n}{n+1}$$

4) b) De la même manière, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt$ existe et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta} t^{n+1}\,dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^{\theta}$$

$$= \frac{\theta^2 n}{n+2}$$

Donc $V(Y_n)$ existe et d'après Koënig-Huygens, on a :

$$V(Y_n) = \frac{\theta^2 n}{n+2} - \left[\frac{\theta n}{n+1}\right]^2$$

$$= \frac{\theta^2 n(n+1)^2 - \theta^2 n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{\theta^2 n\left(2n + n^2 + 1 - n(n+2)\right)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

5) Soit $2_n = \frac{n+1}{n} Y_n$

5) a)
J'admets que 2_n est un estimateur de θ.

On a, par linéarité de l'espérance:

$$E(2_n) = \frac{n+1}{n} E(Y_n)$$

$$= \frac{n+1}{n} \times \frac{n\theta^2}{n+}$$

$$= \frac{n+1}{n} \times \frac{\theta n}{n+1}$$

$$= \theta$$

5) b) Par propriété de la variance, on a:

$$V(2_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2} V(Y_n)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

6) a)

$n \geq 47 \iff \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{49}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or : $5 \leq \theta \leq 7 \iff 25 \leq \theta^2 \leq 49$

Donc :

$$\frac{\theta^2}{n+2} \leq \frac{\theta^2}{49} \leq \frac{49}{49} = 1$$

6) b)

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|2m - E(2m)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(2m)}{\varepsilon^2}$$

Or :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|2m - E(2m)| < \varepsilon) = 1 - P(|2m - \theta| \geq \varepsilon)$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

~~et $[|2n-\theta|<\varepsilon] \subset [|2n-\theta| \leq \varepsilon$~~

Donc :

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|2n-\theta|<\varepsilon) \geq 1 - \frac{V(2n)}{\varepsilon^2}$

Or $P(|2n-\theta|<\varepsilon) \leq P(|2n-\theta| \leq \varepsilon)$ donc :

$P(|2n-\theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$

Or, d'après 6) a) :

$\frac{\theta^2}{n+2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

D'où, par transitivité :

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|2n-\theta| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$

6) c)

On pose $\varepsilon = \frac{1}{10}$. On a donc

$1 - \frac{1}{2000\varepsilon^2} = 0,95$.

On en déduit, d'après 6) b) :

$P\left(|2m - \theta| \leq \frac{1}{10}\right) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow P\left(-\frac{1}{10} \leq 2m - \theta \leq \frac{1}{10}\right) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow P\left(2m - \frac{1}{10} \leq \theta \leq 2m + \frac{1}{10}\right) \geq 0,95$

Donc $\left[2m - \frac{1}{10}, 2m + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour θ, avec un niveau de confiance $\geq 0,95$.

7) Ce code compte le nombre de fois où $|2m - \theta| \leq \frac{1}{10}$, ~~c'est-à-dire que~~ puis le divise par 1000 pour en faire

une moyenne.

Ainsi, le code print(mystere(6)) devrait renvoyer un nombre compris entre 0,95 et 1 pour la valeur $\Theta = 6$.

Problème :

Partie 1 :

1) a)

$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$= n J_n$$

Donc :

$$J_n^2 - n J_n = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.$$

Donc $P : x \mapsto x^2 - nx$ est un polynôme annulateur de J_n.

1) b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• $P(x) = 0 \iff x(x-n) = 0$

$\iff x = 0 \quad$ ou $\quad x = n$.

Donc $Sp(J_n) \subset \{0, n\}$.

• J_n est symétrique donc elle est diagonalisable.

• Supposons, par l'absurde, que 0 ou n ne soient pas valeur propre de J_n.

Alors J_n possèderait au maximum une valeur propre. Comme J_n est diagonalisable alors on peut écrire :

$J_n = P D P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible

et D ~~diag~~ $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale ~~dont~~ et possédant les valeurs propres de J_n sur sa diagonale. Donc $D = I_n \times n$ ou $D = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

ie :

$J_n = P I_n \times n P^{-1}$ ou $J_n = 0$

$= n I_n$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ces 2 résultats sont absurdes donc

$\underline{Sp(J_n) = \{0, n\}}$.

1)c) On pose $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$J_n X = nX \iff (J_n - n)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1-n & \cdots & 1-n \\ \vdots & & \vdots \\ 1-n & \cdots & 1-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} x_k(1-n) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k(1-n) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} x_k - n\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k - n\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \end{array} \right.$$

Je ne conclus pas.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

1) d)

On en déduit que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J_n, associé à la valeur propre n.

Donc :

$$E_n(J_n) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \text{Vect} \langle U \rangle$$

Et on a donc :

$$\dim(E_n(J_n)) = \text{card}(U) = 1$$

Partie 2 :

2) a)

le graphe est un graphe d'ordre 4, de diamètre $D = 2$ car 1-2-3 est la

distance la plus grande reliant 2 paires de sommets et car le degré maximal des sommets du graphe est de 2.

2) b)

- G_1 est bien d'ordre 5, de distance maximale 2 (ex : 1 - 2 - 3) et de degré maximal 2 (chaque sommet étant relié à maximum 2 autres sommets de manière directe.

- G_3 est le deuxième graphe appartenant à $Es(2)$ pour des raisons identiques.

- $G_2 \notin Es(2)$ car le degré du sommet 1 vaut 4.

- $G_4 \notin Es(2)$ car son diamètre est de 4.

3) a)

Soit $G \in Em(d)$ et s un sommet fixé de ce graphe.

Pour tout sommet de G, son degré vaut au maximum d par définition de $Em(d)$.

D'où $\deg(s) \leq d$. Donc s possède au maximum d voisins.

3) b)

3) c)

D'après 3) b) :

$$n - 1 \leq d + d(d-1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \leq d(d - 1 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 \leq d^2$$

$$\Leftrightarrow n \leq d^2 + 1$$

Partie 3 :

4) ~~A n'est~~

G n'est pas orienté donc, par définition, $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$.

Donc A est symétrique.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 293 | Nombre de pages : 39 | Session : 2026

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5) a)

G est un graphe simple et non pondéré donc :

$\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, a_{i,j} \in \{0, 1\}$.

5) b) $a_{i,i}$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ désigne une sommet qui est relié à lui-même (donc une boucle). Or G est simple (donc ne possède pas de boucles). On en déduit que $a_{i,i} = 0$.

6) a)

$\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}$

Or A est symétrique donc, pour tout $(i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

D'où :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{j,k}$$

6) b)

$\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k})^2$ (d'après 6)a))

Or, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} \in \{0, 1\}$ donc :

$(a_{i,i})^2 \in \{0, 1\}$, ie $(a_{i,i})^2 = a_{i,i}$.

On en conclut :

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$$

· Or, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ renvoie le degré du sommet i. Puisque G est un graphe de Moore alors

Je ne conclus pas.

7) a)

7) b)

On en déduit que :

$\forall (i,j) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, i \neq j, b_{i,j} + a_{i,j} = 1$

7) c)

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} = 0$

Donc :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,i} + a_{i,i} = d + 0$

$= d$

(d'après 6) b)).

8)

Partie 4 :

9) A est symétrique d'après 4) donc diagonalisable.

10) a) Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$AU = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

Or :

$$dU = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} \quad \text{donc :}$$

$$AU = dU.$$

10) b)

On en déduit, comme U est non nul, que d est valeur propre de A associé au vecteur propre U.

11) a) Soit λ une valeur propre de A. On a :

$$AX = \lambda X \iff \left[(d-1)I_n + J_n - A^2\right]X = \lambda X$$

$$\iff (d-1)X + J_n(X) - A^2X = \lambda X$$

Or : $AX = \lambda X \iff A^2X = \lambda^2 X$.

D'où :

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 385952

Emplacement QR Code

Code épreuve : 298 **Nombre de pages :** 39 **Session :** 2026

Épreuve de : Maths appliquées EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

$(d-1)X + J_n X - \lambda^2 X = \lambda X$

$\Leftrightarrow J_n X = \lambda X - (d-1)X + \lambda^2 X$

$\Leftrightarrow \underline{J_n X = (\lambda^2 + \lambda - d + 1)X}$

11) b)

Soit $\lambda = d$. On a alors :

$J_n X = (d^2+1)X$

avec $d^2+1 = n$ d'après 3). Donc, d'après 1)d), $X \in \text{Vect}\langle U \rangle$.

Donc :

$J_n X = (d^2+1)X \Leftrightarrow AX = \lambda X$

Je ne conclus pas.

37/40

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie 5 :

12) a)

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$A = PBP^{-1} \iff tr(A) = tr(PBP^{-1})$$

$$\iff tr(A) = tr(BPP^{-1})$$

$$\iff tr(A) = tr(B)$$

12) b)

13) d'après 11) b), l'espace propre associé à la valeur propre d est de dimension 1. Comme Δ est semblable à A, alors Δ possède les valeurs propres de A sur sa diagonale, et leur nombre dépend de la dimension de chaque espace propre associé. Donc Δ ne comporte qu'un seul élément diagonal égal à d, le reste étant égal à b ou c.

14)

15) a)

$$\mathrm{tr}(\Delta) = \mathrm{tr}(A) \iff \mathrm{tr}(A) = d + \sum_{k=1}^{n-1} b$$

$$= d + (n-1)b$$

Fim.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094