Copie anonyme - n°anonymat : 582969

N1-00050
582969
Maths T

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 32 | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

EXERCICE 1 :

Partie I

1) $R(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $x = 2$
$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Donc les racines de R sont -2 et 2.

2) R est un polynôme annulateur de M et les racines de R sont -2 et 2. Donc les valeurs propres possibles de M sont -2 et 2. $Sp(M) \subset \{-2, 2\}$.

3) * $MU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$MU = -2U$

* $MV = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$MV = 2V$

4- on a $MU = -2U$ et $MV = 2V$ et $U \neq 0$ et $V \neq 0$
Donc -2 et 2 sont valeurs propres de M.
D'où $Sp(M) = \{-2, 2\}$

5) on a $R(M) = 0 \Rightarrow (M^2 - 4I)(M - 2) = 0_3$

$\Rightarrow M^3 - 2M^2 - 4M + 8I = 0_3$

$\Rightarrow M^3 - 2M^2 - 4M = -8I$

$\Rightarrow M(M^2 - 2M - 4I) = -8I$

$\Rightarrow \frac{-1}{8} M(M^2 - 2M - 4I) = I$

Donc M est inversible et $M^{-1} = -\frac{1}{8}(M^2 - 2M - 4I)$.

Partie II

6) $T^2 = T.T$

$$T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{T^2 = I_3 + N}$$

7) $N^2 = N \cdot N$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{N^2 = 0_3}$$

8) on a $T^2 = I_3 + N$

or $IN = NI$.

Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$T^{2n} = (I+N)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$$

$$T^{2n} = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N I^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k}$$

or $\forall k \geq 2$, $N^k = N^2 \cdot N^{k-2}$ (car $k-2 \geq 0$)

$$= 0_3$$

Donc $\forall n \geq 2$, $T^{2n} = \binom{n}{0} N^0 I^n + \binom{n}{1} N I^{n-1}$

$$T^{2n} = I + nN$$

Vérifions pour $n=0$ et $n=1$

Pour $n=0$: on a $I + 0N = I = T^0$

Pour $n=1$, on a $I + nN = I + N = T^2$ (déjà prouvé 9b)

Donc on en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^{2n} = I + nN$.

9) ~~$T^{2n+1} = I + I$~~

$$T^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{2n+1} = T^{2n} \cdot T$$
$$= (I + nN)T$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & n \\ 0 & 1 & 1+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie III :

10) Pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \left|\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

T est une matrice triangulaire avec ses coefficients diagonaux tous non nuls donc T est inversible.

Déterminons T^{-1} :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

On obtient donc :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

11) $(T^{-1})^2 = (T^{-1})(T^{-1})$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(T^{-1})^2 = I_3 - N$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

12) $(T^{-1})^{2n} = T^{2(-n)}$

$$= I - nN$$

en remplaçant n par $-n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(T^{-1})^{2n+1} = (T^{-1})^{2n}(T^{-1})$

$= (I - nN)(T)$

Donc $(T^{-1})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(T^{-1})^{2n+1} = (T)^{-2n-1}$

$= (T)^{2(-n-1)+1}$

En remplaçant n par $-n-1$

$$(T^{-1})^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -n-1 \\ 0 & 1 & 1+2(-n-1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T^{-1})^{2n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -n-1 \\ 0 & 1 & -2n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18) Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}$

Initialisation: Pour $k=0$.

$(T^{-1})^0 = I$ et $(T^0)^{-1} = (I)^{-1} = I$

Donc la propriété est initialisée.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ (fixé)

Supposons que $(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}$

Démontrons que $(T^{-1})^{k+1} = (T^{k+1})^{-1}$

$$\begin{aligned} (T^{-1})^{k+1} &= (T^{-1})^k (T^{-1}) \\ &= (T^k)^{-1} (T^{-1}) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (T^k \cdot T)^{-1} \\ &= (T^{k+1})^{-1} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(T^{-1})^k = (T^k)^{-1}$.

14) Soit $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$.

- si $j \geq 0$, posons $k = j$.

Donc $T^j = T^{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 2j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $T^{2g+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & g \\ 0 & 1 & 1+2g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $g \leq 0$, posons $g = -k$.

Donc $T^{2g} = T^{-2k}$

$= (T^{-1})^{2k}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & -2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{2g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & g \\ 0 & 1 & 2g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $T^{2g+1} = T^{-2k+1}$

$= (T^{-2k})(T)$

$=$

Partie IV

15) Pivot de Gauss :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \in L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On obtient une matrice triangulaire avec les coefficients diagonaux tous non nuls. Donc P est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

16)

$$MP = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

17) L'on remarque que $MP = 2PT$

$\Leftrightarrow MPP^{-1} = 2PTP^{-1}$

$\Leftrightarrow M = 2PTP^{-1}$

Donc $a = 2$

18) M est inversible donc $M.M^{-1} = I$.

or $(aPTP^{-1})\left(\frac{1}{a}PT^{-1}P^{-1}\right) = a \times \frac{1}{a} PTP^{-1}PT^{-1}P^{-1}$

$= PTIT^{-1}P^{-1}$

$= PP^{-1}$

$(a\,PTP^{-1})\left(\frac{1}{a}\,PT^{-1}P^{-1}\right) = I$

b'où $M\left(\frac{1}{a}\,PT^{-1}P^{-1}\right) = I$.

On en déduit que $M^{-1} = \frac{1}{a}\,PT^{-1}P^{-1}$.

$$M^{-1} = \frac{1}{2}\,PT^{-1}P^{-1}$$

1g) Initialisation: Pour $n=0$.

$M^0 = I$ et $a^0\,PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I$

$(M^{-1})^0 = I$ et $\frac{1}{a^0}\,PT^{-0}P^{-1} = PP^{-1} = I$

La propriété est donc initialisée.

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

Supposons que $M^n = a^n\,PT^nP^{-1}$ et que $(M^{-1})^n = \frac{1}{a^n}\,PT^{-n}P^{-1}$

Démontrons que $M^{n+1} = a^{n+1}\,PT^{n+1}P^{-1}$ et $(M^{-1})^{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}}\,PT^{-(n+1)}P^{-1}$

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \cdot M \\ &= (a^n\,PT^nP^{-1}) \cdot (a\,PTP^{-1}) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= a^{n+1}\,PT^nTP^{-1} \end{aligned}$$

$$M^{n+1} = a^{n+1}\,PT^{n+1}P^{-1}$$

$$\begin{aligned} (M^{-1})^{n+1} &= (M^{-1})^n (P^{-1}) \\ &= \left(\frac{1}{a^n}\,PT^{-n}P^{-1}\right)\left(\frac{1}{a}\,PT^{-1}P^{-1}\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{a^n \cdot a}\,PT^{-n}P^{-1}PT^{-1}P^{-1} \\ &= \frac{1}{a^{n+1}}\,PT^{-n}\cdot T^{-1}P^{-1} \end{aligned}$$

$(M^{-1})^{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}} P T^{-(n+1)} P^{-1}$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion:

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$M^n = a^n P T^n P^{-1}$ et $(M^{-1})^n = \frac{1}{a^n} P T^{-n} P^{-1}$.

EXERCICE 2.

Partie I:

2°) $x \in D \iff 1+x > 0$
$\iff x > -1$

Donc $D =]-1, +\infty[$.

2 1) f est dérivable sur D car la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur D.

$\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$
$= \frac{1-1-x}{1+x}$
$f'(x) = -\frac{x}{1+x}$.

~~On a~~ ~~lim~~ $\forall x \in]-1, +\infty[$, $1+x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$.

Donc $\forall x \in]-1, 0]$, $f'(x) \geq 0$
et $\forall x \in [0, +\infty[$, $f'(x) \leq 0$.

12/

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On en déduit les variations suivantes :
- Sur $]-1, 0]$ f est croissante
- Sur $[0, +\infty[$ f est décroissante

22) D'après les variations de f, le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse $x=0$.

or $f(0) = \ln(1+0) - 0 = \ln(1) = 0$.

Donc $\forall x \in]-1, +\infty[$, $f(x) \leq f(0)$

$\Rightarrow f(x) \leq 0$

$\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0$

$\Rightarrow \ln(1+x) \leq x$.

23) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

or on a $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

24) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n+1} \in]-1, +\infty[$ (car $n+1 \geq 2 \Rightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{2}$)

Donc d'après q22), $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

On en conclut que la suite (u_n) est décroissante

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

25) Soit $t \in [k, k+1]$

on a $k \leq t < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt$

Par croissance de l'intégrale

$\Rightarrow \frac{1}{k}[t]_k^{k+1} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$

$k \leqslant t \leqslant k+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}(k+1-k) \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$

26) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \geqslant [\ln(t)]_k^{k+1}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$

Par somme on obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$

On reconnaît une somme télescopique pour le membre de droite. Par télescopage, on obtient :

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad H_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(1)$

$H_n \geqslant \ln(n+1)$.

or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n+1 \geqslant n \Rightarrow \ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ car la fonction ln est croissante.

Donc on obtient finalement :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n \geqslant \ln(n)$

$\Rightarrow \quad H_n - \ln(n) \geqslant 0$

$\Rightarrow \quad u_n \geqslant 0$

27) (u_n) est décroissante et minorée ($u_n \geqslant 0$). Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

28) ~~Soit~~ ~~$H_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln(2)$~~

$= \frac{u_2}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n + \ln(n)}{\ln(n)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$$

Puisque (u_n) converge, alors u_n tend vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$ existe et vaut 0.

On en conclut que la limite demandée existe et a valeur $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$

$= 1$

Partie II

29) X_k est la variable aléatoire égale au nombre d'achats supplémentaires à réaliser pour obtenir une nouvelle carte que on avait pas encore. Donc la somme $\sum_{k=1}^{n} X_k$ donne le nombre d'achats total réalisé pour obtenir les n cartes différentes de la collection.

D'où $N_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes :
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

30) Au premier jour, on achète une carte qu'on avait pas donc nécessairement on a $X_1 = 1$.

Donc $X_1(\Omega) = \{1\}$, X_1 est la v.a certaine. car $P(X_1=1)=1$

$E(X_1) = 1$ et $V(X_1) = E(X_1^2) - E^2(X_1)$

$= 1 \times 1 - 1$

$E(X_1) = 1$ et $V(X_1) = 0$

31) Au deuxième jour, pour avoir une carte différente de la première, il faut acheter une carte parmi les $n-1$ cartes différentes restantes et ce dans un lot de n cartes possibles.

Donc la probabilité d'acquérir une carte différente lors du 2e achat est $P(X_2=1) = \frac{n-1}{n}$.

32) X_2 est la variable aléatoire égale au rang d'apparition d'une carte différente de celle tirée le premier jour avec une probabilité de succès de $p = \frac{n-1}{n}$.

X_2 suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{n-1}{n}$.

$X_2 \rightsquigarrow G\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Donc $E(X_2) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-1}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$V(X_2) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$= \frac{\frac{n-n+1}{n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

$$\boxed{V(X_2) = \frac{n}{(n-1)^2}}$$

33) Si l'on possède déjà $k-1$ cartes différentes parmi les n cartes de la collection, la probabilité d'obtenir une nouvelle carte est :

$$p_{n,k} = \frac{n-(k-1)}{n}$$

$$\boxed{p_{n,k} = \frac{n-k+1}{n}}$$

34) X_k est la variable aléatoire égale au nombre ~~de~~ d'achats supplémentaires avant d'acquérir une nouvelle. Donc X_k correspond au rang ~~de l'achat~~ du premier achat permettant d'obtenir une nouvelle carte avec une probabilité égale à $p_{n,k}$.

Donc $X_k \sim G(p_{n,k}) \Rightarrow X_k \sim G\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$.

35)

Partie VII :

36) Pour la table CARTES, la clé primaire choisie doit être le champ Date. Car on réalise 1 seul achat par jour. Il n'y a donc pas de répétition dans ce champ, c'est un identifiant.

37)

Select distinct Nom from CARTES ;

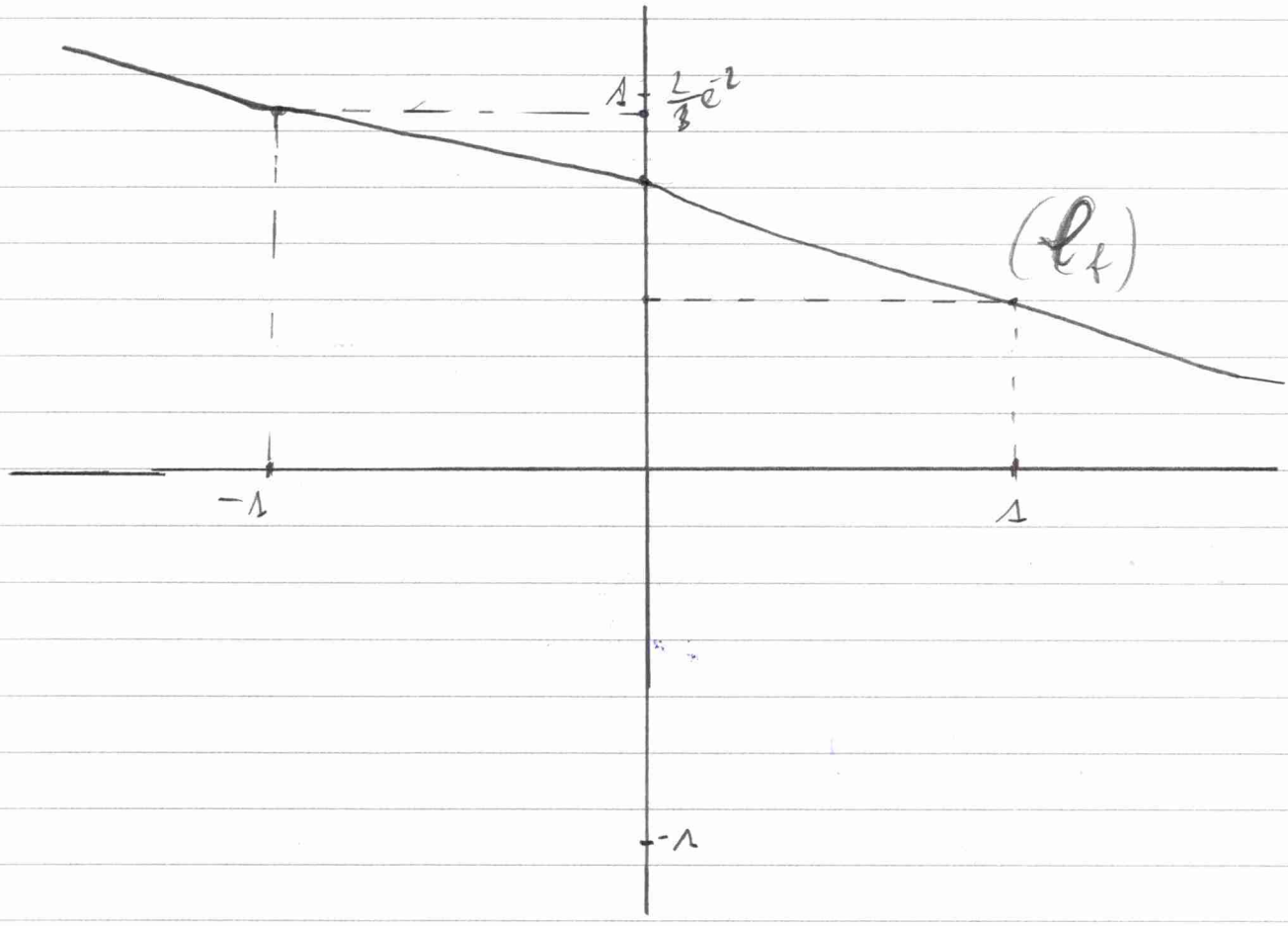
38) Select Nom from POKEMON where PV >= 100 ;

39) Select P.* from POKEMON P join CARTES C on P.Nom = C.Nom where Energie = "feu" ;

EXERCICE 3 :

Partie I

40) Allure de la courbe :



IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

41)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    if x < 0:
        return (2/3) * np.exp(2*x)
    else:
        return (2/3)* np.exp(-x)

A = np.linspace(-1, 1, 1000)
B = np.zeros(1000)
for k in range(1000):
    B[k] = f(A[k])
plt.plot(A, B)
```

Partie II :

42) Continuité :

f est continue sur $]-\infty, m[$ et est continue sur $[m, +\infty[$. (par composée)

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en m.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Positivité :

$\forall x \in]-\infty, m[$, $f(x) = M e^{-a(x-m)}$. Pour que $f(x)$ soit positif sur cet intervalle, il faut : $M \geq 0$.

De même $\forall x \in [m, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ si $M \geq 0$.

Donc pour $M \geq 0$, $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

Convergence de l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = M \int_{-\infty}^{m} e^{a(x-m)}\,dx$$

et $$\int_{m}^{+\infty} f(x)\,dx = M \int_{m}^{+\infty} e^{-a(x-m)}\,dx$$

Soit $n \in \mathbb{R}_+$

$$M \int_{m}^{n} e^{-a(x-m)}\,dx = M \int_{m}^{n} e^{-ax+am}\,dx$$

$$= M \left[-\frac{1}{a} e^{-ax+am} \right]_{m}^{n}$$

$$= M \left(-\frac{1}{a} e^{-an+am} + \frac{1}{a} e^{-am+am} \right)$$

$$= M \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-an+am} \right)$$

et $$\lim_{n \to +\infty} M \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-an+am} \right) = \lim_{n \to +\infty} M \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-an} e^{am} \right)$$

$$= \frac{M}{a}$$

car $\lim_{n \to +\infty} e^{-an} = 0$.

Donc $M \int_{am}^{+\infty} e^{-a(x-m)}\,dx = \frac{M}{a}$:

De même, soit $k \in \mathbb{R}_-$.

$$M\int_k^m e^{b(x-m)}\,dx = M\left[\frac{1}{b}e^{bx-bm}\right]_k^m$$

$$= M\left(\frac{1}{b}e^{bm-bm} - \frac{1}{b}e^{bk-bm}\right)$$

$$= M\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b}e^{bk} \times e^{-bm}\right)$$

Or $\lim_{k\to-\infty} M\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b}e^{bk} \times e^{-bm}\right) = M\left(\frac{1}{b}\right)$

Car $\lim_{k\to-\infty} e^{bk} = 0$.

Donc $M\int_{-\infty}^m e^{b(x-m)}\,dx = \frac{M}{b}$.

~~Par conséquent, $M\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b(x-m)}\,dx = 1$~~

Puisque les deux intégrales convergent alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \frac{M}{b}(1 - e^{-bm}) + \frac{M}{a}(1 - e^{am})$

$$= M\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{e^{-bm}}{b} - \frac{e^{am}}{a}\right)$$

$$= M\left(\frac{1-e^{am}}{a} + \frac{1-e^{-bm}}{b}\right)$$

Or pour que f soit une densité de probabilité on doit avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow M\left(\frac{1-e^{am}}{a} + \frac{1-e^{-bm}}{b}\right) = 1$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\frac{1-e^{am}}{a} + \frac{1-e^{-bm}}{b}}$$

$$= \frac{1}{\frac{b-be^{am}+a-ae^{-bm}}{ab}}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow M = \dfrac{ab}{a+b-be^{am}+ae^{-bm}}$

48)

$\forall x \leq m,\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_{-\infty}^{x} M e^{b(t-m)}\,dt$

$= M \int_{-\infty}^{x} e^{b(t-m)}\,dt$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X'(x) = f(x)$.

$\forall x \leq m$, on pose $h : x \mapsto \dfrac{a}{a+b} e^{b(x-m)}$

$h'(x) = b e^{b(x-m)} \dfrac{a}{a+b}$

$= \dfrac{ab\, e^{b(x-m)}}{a+b}$

$= \dfrac{ab}{a+b} e^{bx}$.

↳ Voir page Suivante pour la suite.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

on a $\int_{-\infty}^{m} f(x)\,dx = \frac{M}{b}$ et $\int_{m}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{M}{a}$.

Puisque ces intégrales convergent, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{M}{b} + \frac{M}{a}$

$= M\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

$= M\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

Or pour que f soit une fonction d'une v.a X à densité, on doit avoir :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow M\left(\frac{a+b}{ab}\right) = 1$

$\Rightarrow M = \frac{ab}{a+b}$

43) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $F_X'(x) = f(x)$.

Posons $h : x \mapsto \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)}$.

$\forall x < m$, $h'(x) = b\, e^{b(x-m)} \frac{a}{a+b}$

$h'(x) = \frac{ab}{a+b} e^{b(x-m)}$

$= M e^{b(x-m)}$

Donc on en déduit que $\forall x < m$, $F_X(x) = \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)}$

Posons $g : x \mapsto 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)}$

$\forall x \geq m$, $g'(x) = \frac{ab}{a+b} e^{-a(x-m)}$

$g'(x) = M e^{-a(x-m)}$

$= f(x)$

Donc, $\forall x \geq m$, $F_X(x) = 1 - \frac{a}{a+b} e^{-a(x-m)}$.

De plus, la fonction $F_X(x)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$,
$F_X(x)$ est dérivable
$F_X(x)$ est croissante

$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} = 0$ car $\lim_{x \to -\infty} e^{x-m} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)} = 1$ car $\lim_{x \to +\infty} e^{-ax+am} = 0$

On peut en conclure que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} & \text{si } x < m \\ 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(x-m)} & \text{si } x \geq m. \end{cases}$

44) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{-X}(x) = P(-X \leq x)$

$= P(X \geq -x)$

$= 1 - F_X(-x)$

$$F_X(-x) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} e^{b(x-m)} & \text{si } -x < m \\ 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(-x-m)} & \text{si } -x \geq m \end{cases}$$

Donc

$$F_{-X}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a}{a+b} e^{b(-x-m)} & \text{si } x > -m \\ \frac{b}{a+b} e^{-a(-x-m)} & \text{si } x \leq -m \end{cases}$$

45) Déterminons une densité de $-X$

Soit f_{-X} une densité de $-X$.

Partie III :

46) $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$F_Y(y) = P(|X-m| \leq y)$

Donc si $y < 0$, l'événement $(|X-m| \leq y)$ est impossible par conséquent, $F_Y(y) = 0$.

47) Si $y \geq 0$, $F_Y(y) = P(|X-m| \leq y)$

$= P(-y \leq X-m \leq y)$

$= P(m-y \leq X \leq y+m)$

$F_Y(y) = F_X(y+m) - F_X(-y+m)$

48- $\forall y \geq 0$, $F_Y(y) = F_X(y+m) - F_X(-y+m)$

$$F_X(y+m) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} e^{b(y+m-m)} & \text{si } y+m < m \\ 1 - \frac{b}{a+b} e^{-a(y+m-m)} & \text{si } y+m \geq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{a}{a+a} e^{by} & \text{si } y < 0 \\ 1 - \frac{a}{a+a} e^{-ay} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(-y+m) = \begin{cases} \frac{a}{2a} e^{a(-y+m-m)} & \text{si } -y+m < m \\ 1 - \frac{a}{2a} e^{-a(-y+m-m)} & \text{si } -y+m \geq m \end{cases}$$

Donc $\forall y \geq 0$, $F_Y(y) = 1 - \frac{a}{2a} e^{-ay} - \frac{a}{2a} e^{-ay}$

$= 1 - e^{-ay}$.

D'où $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-ay} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$

F_Y coïncide avec la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094

Copie anonyme - n°anonymat : 582969

Emplacement QR Code

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : | Session : 2026

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

a . Donc $Y \sim \mathcal{E}(a)$

4d)
$$P(X>m) = P(X-m>0)$$
$$= P(|X-m|>0)$$
$$= P(Y>0)$$
$$= 1 - F_Y(0)$$
$$= 1 - 1 + e^0$$
$$P(X>m) = 1$$

5b) le resultat est une estimation de l'espérance de la variable aléatoire X suivant une loi de Laplace asymétrique associée aux paramètres $m=2$ et $a=1$.
$X \sim \mathcal{L}(2,1,1)$

et $F(x) \simeq 2,02\ldots$

Partie IV

5.1)

5.2)

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5)) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2025-12-1003094